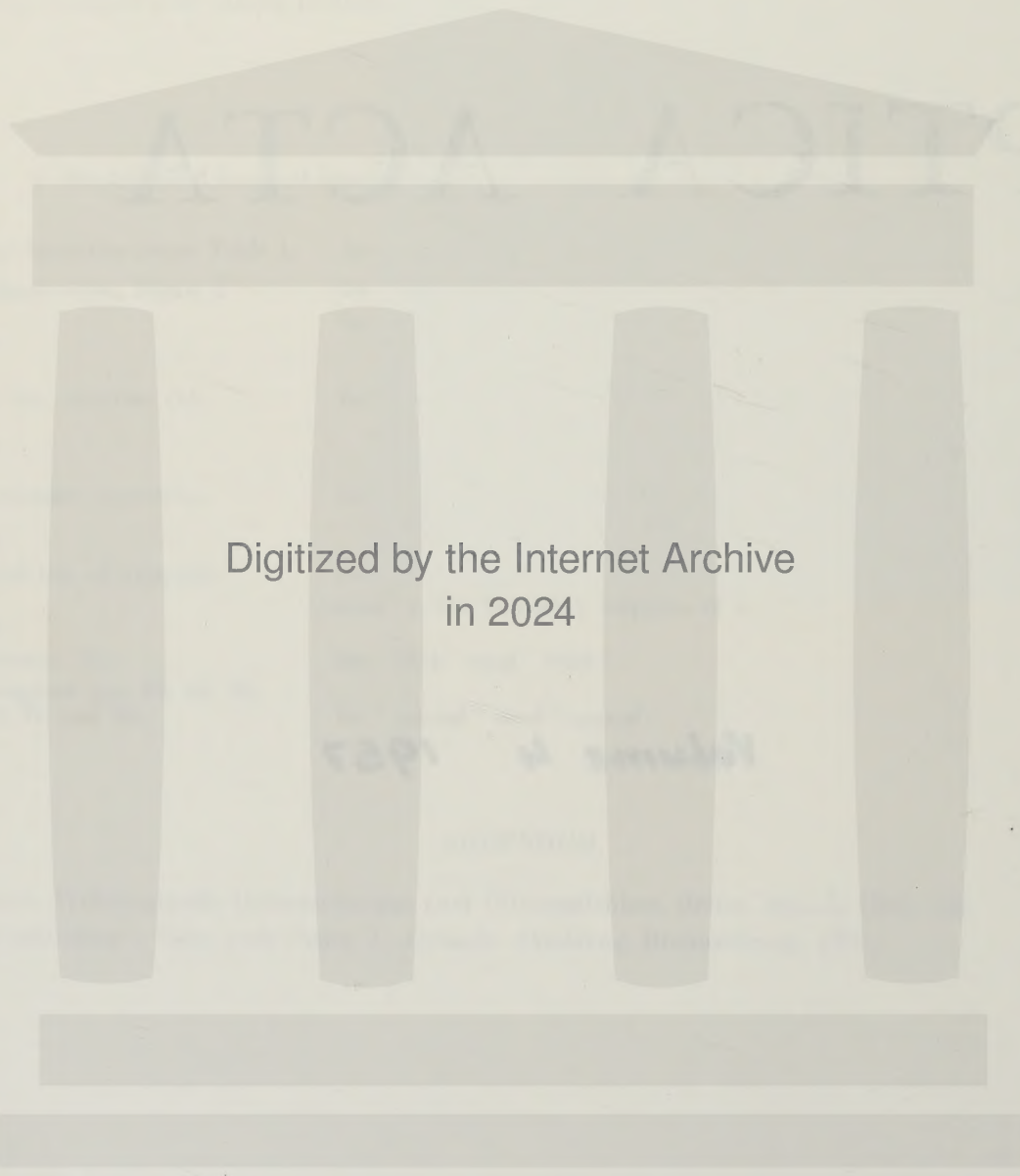


OPTICA ACTA

Volume 4 1957



Digitized by the Internet Archive
in 2024

Etude théorique de la pénétration du rayonnement dans les milieux diffusants naturels

M^{lle} JACQUELINE LENOBLE

Laboratoire de Physique appliquée du Muséum, Paris

SOMMAIRE. — Après avoir rappelé l'équation régissant la pénétration du rayonnement dans un milieu diffusant et résumé la méthode de résolution approchée de Chandrasekhar, nous donnons des exemples d'application de cette méthode à une couche de brouillard et à la mer, et nous discutons les approximations faites.

ZUSAMMENFASSUNG. — Die Gleichung für das Eindringen einer Strahlung in ein streuendes Medium wird aufgestellt und kurz die Methode von Chandrasekhar für eine Näherungslösung angegeben. Dann folgen Anwendungsbeispiele dieses Verfahrens auf eine Nebelschicht und auf das Meer und schliesslich eine Diskussion über die erzielten Näherungen.

SUMMARY. — The equation governing the penetration of radiation in a scattering medium is given and Chandrasekhar's approximate method of resolution is summarised; this method is applied to a layer of haze and to the sea and the approximations are discussed.

La pénétration et la répartition du rayonnement électromagnétique et tout spécialement des ondes lumineuses dans les milieux diffusants naturels (brouillard et brume, eau de mer) présente un grand intérêt pratique; l'étude théorique en est simple et aboutit à des équations bien connues, mais dont la résolution exacte a été jusqu'ici impossible. Le très important travail de S. CHANDRASEKHAR [1] sur les problèmes de transfert de rayonnement a apporté récemment de nombreuses méthodes nouvelles de résolution, exacte ou approchée, dont nous avons appliqué une partie à cette étude de la diffusion dans le brouillard et dans la mer [2].

I. Méthode. 1. Equation de transfert du rayonnement.

— Nous considérons une couche plane et homogène d'un milieu diffusant caractérisé par le coefficient népérien d'absorption totale K , le coefficient d'absorption apparente par diffusion $k = \varpi_0 K$ où $\varpi_0 \leq 1$, et le coefficient d'absorption propre $\beta = (1 - \varpi_0) K$. Une direction sera repérée par l'angle θ avec la verticale ascendante et l'azimut φ ; nous posons $\mu = \cos \theta$; soit H la profondeur comptée à partir de la surface supérieure de la couche recevant le rayonnement incident et $\tau = KH$ la profondeur optique correspondante; l'épaisseur optique totale de la couche est $\tau_1 = K \mathcal{H}$. Nous écrirons le coefficient de diffusion dans la direction (μ, φ) faisant l'angle Θ avec la direction d'incidence (μ', φ') sous la forme $\frac{K}{4\pi} p(\cos \Theta) = \frac{K}{4\pi} p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') (*)$; $p(\cos \Theta)$ est la fonction de phase et la courbe $\frac{K}{4\pi} \rho(\cos \Theta)$

en fonction de Θ est l'indicatrice de diffusion.

Le soleil produit à la surface de la couche diffusante un éclaircissement πF sur un plan perpendiculaire à sa direction de propagation (μ'_0, φ'_0) ; le ciel au-dessus de la couche a une luminance uniforme I_0 . Soit $I(\tau; \mu, \varphi)$ la luminance dans la couche, à la profondeur τ , du

rayonnement diffusé se propageant dans la direction (μ, φ) .

L'équation de transfert à laquelle satisfait cette luminance s'établit facilement :

$$(1) \quad \frac{\mu dI(\tau; \mu, \varphi)}{d\tau} = I(\tau; \mu, \varphi) - \frac{1}{4} p(\mu, \varphi; \mu'_0, \varphi'_0) F e^{\tau/\mu'_0} - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi'$$

Les conditions aux limites sont :

$$(2) \quad \begin{cases} I(0; \mu < 0) = I_0 \\ I(\tau_1; \mu > 0) = 0 (**), \end{cases}$$

la deuxième condition se réduit à I borné quand τ_1 devient infiniment grand.

2. Résolution de l'équation de transfert. — L'indicatrice de diffusion doit être représentée sous une forme mathématique et nous choisirons pour cela un développement en polynômes de LEGENDRE :

$$(3) \quad p(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^N \varpi_l P_l(\cos \Theta);$$

d'après la propriété d'additivité de ces polynômes :

$$(3') \quad p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^l (2 - \delta_{0m}) \varpi_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi' - \varphi)$$

(*) On a évidemment la relation :

$$2\pi \int_0^\pi \frac{K}{4\pi} p(\cos \Theta) \sin \Theta d\Theta = k = \varpi_0 K.$$

(**) Cette condition correspond au cas simple d'un sol noir; on peut la remplacer par des expressions plus compliquées pour tenir compte d'une réflexion du sol.

où $\delta_{0m} = 1$ si $m = 0$,

$\delta_{0m} = 0$ si $m \neq 0$,

$\varpi_l^m = \varpi_l \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$ et P_l^m sont les fonctions associées des polynômes de LEGENDRE.

Si on développe

$$(4) \quad I(\tau; \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^N I^m(\tau; \mu) \cos m(\varphi'_0 - \varphi),$$

on peut séparer l'équation de transfert en N équations intégral-différentielles en $I^m(\tau; \mu)$ ne contenant plus que les variables τ et μ .

Pour résoudre chacune de ces équations, CHANDRASEKHAR emploie la méthode des ordonnées discrètes, en remplaçant l'intégrale par une somme d'un nombre fini de $2n$ termes suivant la formule de quadrature de GAUSS :

$$\int_{-1}^{+1} f(\mu) d\mu = \sum_{j=-n}^{+n} a_j f(\mu_j) \quad \text{où } \mu_j$$

sont les zéros de $P_{2n}(\mu)$; on est alors ramené à résoudre N systèmes de $2n$ équations différentielles linéaires, ce qui ne présente aucune difficulté mathématique.

La solution peut se mettre sous la forme :

$$(5) \quad I^m(\tau; \mu_i) = \sum_{\alpha=-n}^{+n} \frac{l_\alpha^m e^{-k_\alpha^m \tau}}{1 + \mu_i k_\alpha^m} \left[\sum_{l=m}^N \varpi_l^m P_l^m(\mu_i) \xi_l^m(k_\alpha^m) \right] + \gamma_m^m \frac{F}{4} \frac{e^{\tau/\mu'_0}}{1 - \mu_i/\mu'_0} (2 - \delta_{0m}) \left[\sum_{l=m}^N \varpi_l^m P_l^m(\mu_i) \xi_l^m\left(\frac{-1}{\mu'_0}\right) \right]$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \xi_m^m(k) = 1 \\ \xi_{l+1}^m(k) = \end{cases} = -\frac{2l+1-\varpi_l}{k(l-m+1)} \xi_l^m(k) - \frac{l+m}{l-m+1} \xi_{l-1}^m(k)$$

$$\gamma_m^m = P_m^m(\mu'_0) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^{+n} a_j P_m^m(\mu_j) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\lambda=m}^N \varpi_\lambda^m P_\lambda^m(\mu_j) \frac{\xi_\lambda^m\left(-\frac{1}{\mu'_0}\right)}{1 - \frac{\mu_j}{\mu'_0}} \right\}^{-1}$$

k_α^m sont les racines de l'équation caractéristique (*)

$$(7) \quad 1 = \frac{4}{2} \sum_{j=-n}^{+n} \sum_{\lambda=m}^N \frac{a_j}{1 + \mu_j k} \left[\varpi_\lambda^m P_\lambda^m(\mu_j) P_m^m(\mu_j) \xi_\lambda^m(k) \right]$$

(*) Dans le cas $\tau_0 = 1$ et $m = 0$, il y a la solution double $k_1 = 0$ et le terme correspond dans l'impression de $I^0(\tau; \mu_i)$ se réduit à $I_1^0 + I_{-1}^0 \left[\left(1 - \frac{\tau_1}{3} \right) \tau + \mu_i \right]$.

et l_α^m des constantes d'intégration que l'on détermine par les conditions aux limites.

3. *Remarque sur l'état de polarisation du rayonnement.* — Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés au rayonnement global sans considérer son état de polarisation, or la diffusion modifie toujours plus ou moins la polarisation du rayonnement incident et il peut dans certains cas être utile d'étudier théoriquement ce problème [3]. Pour cela CHANDRASEKHAR représente une grandeur caractérisant l'énergie du rayonnement, par exemple la luminance, par une matrice de la forme :

$$(8) \quad \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} I_l \\ I_r \\ U \\ V \end{pmatrix}, \quad \text{où } I_l \text{ et } I_r \text{ sont les luminances}$$

correspondant aux vibrations suivant 2 axes perpendiculaires arbitraires l et r du plan d'onde; ce rayonnement de luminance totale $I = I_l + I_r$ peut être considéré comme la somme d'un rayonnement polarisé elliptiquement de luminance

$$I^{(p)} = \{ (I_l - I_r)^2 + U^2 + V^2 \}^{1/2},$$

caractérisé par l'angle χ des axes principaux avec l et r et par l'ellipticité $\tan \beta$, et d'un rayonnement naturel de luminance $I^{(n)} = I - I^{(p)}$; on a les relations

$$(9) \quad \begin{cases} I_l - I_r = I^{(p)} \cos 2\beta \cos 2\chi, \\ U = I^{(p)} \cos 2\beta \sin 2\chi, \\ V = I^{(p)} \sin 2\beta. \end{cases}$$

Le coefficient de diffusion s'écrit sous la forme $\frac{K}{4\pi} P(\cos \Theta)$ où $P(\cos \Theta)$ est une matrice de phase à 4 lignes et 4 colonnes, traduisant l'action de la diffusion sur les différents termes de la matrice éclairément.

En utilisant les matrices rapportées aux axes parallèles et perpendiculaires au plan méridien (*), on obtient une équation exactement semblable à l'équation de transfert habituelle; la résolution en est évidemment plus longue.

II. *Application à la brume.* — La brume et le brouillard constituent généralement des couches d'épaisseur finie, où l'absorption propre est négligeable pour le rayonnement visible et ultraviolet proche.

Nous avons appliqué la méthode ci-dessus (approximation d'ordre $n = 3$) à une couche de brume sans absorption propre ($\tau_0 = 1$), caractérisée par l'indicatrice de diffusion (**) $P(\cos \Theta) = 1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta)$, d'épaisseur optique totale $\tau_1 = 4,606$ (***),

(*) Il est important de bien faire les changements d'axe nécessaire pour exprimer $P(\mu, \varphi; \mu', \varphi')$.

(**) Nous discuterons plus loin le choix de cette indicatrice. (***) Rappelons qu'il s'agit toujours de densités optiques népériennes; la densité décimale correspondante est 2.

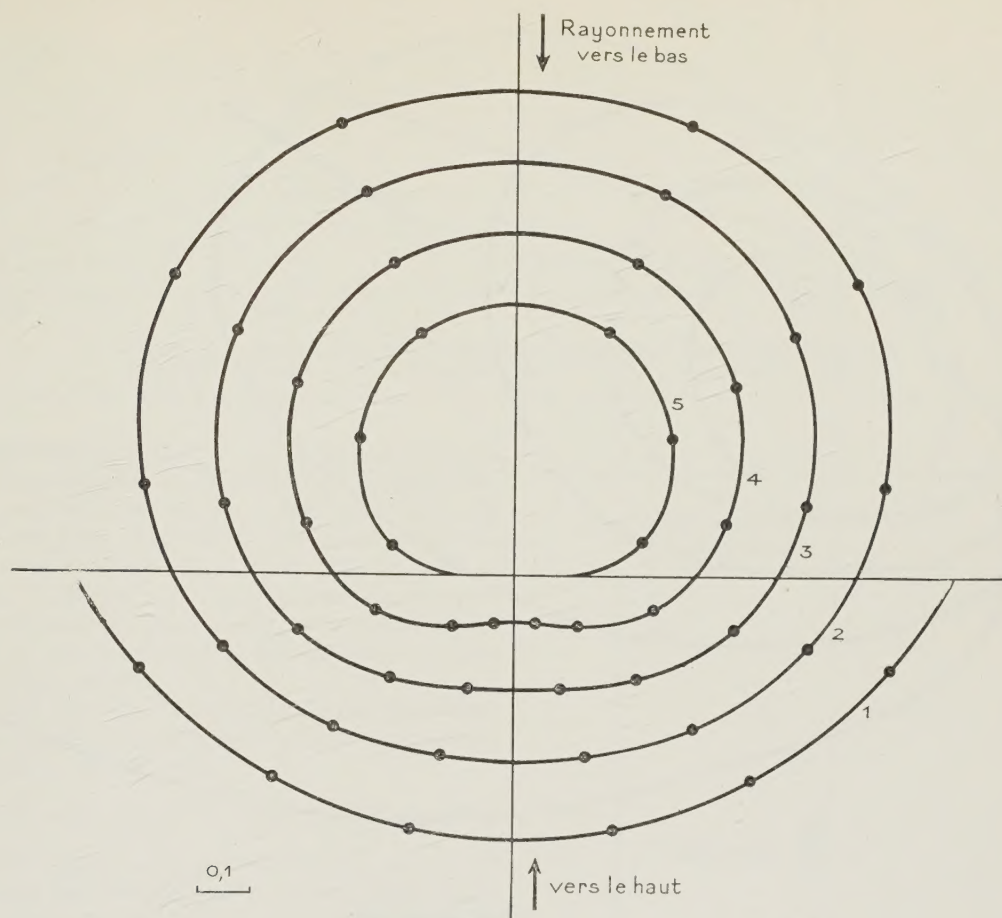


FIG. 1. — Répartition des luminances dans une couche de brume éclairée par un ciel uniforme

$$(\tau_1 = 4,606 - p (\cos \Theta) = 1 + 1,73 P_1 (\cos \Theta) P_2 (\cos \Theta) - \text{sol noir}).$$

Les courbes représentent, en coordonnées polaires $I(\tau; \mu)/I_0$ en fonction de θ dans un plan vertical quelconque ;
 1 — $\tau = 0$ (sommet de la couche) ; 2 — $\tau = 1,151$; 3 — $\tau = 2,303$; 4 — $\tau = 3,454$; 5 — $\tau = 4,606$ (sol).

au-dessus d'un sol noir. Les figures 1 et 2 montrent un exemple des résultats [4] ; on y a porté la luminance I (à un facteur constant près) en fonction de l'angle polaire θ , au sommet, au quart, au milieu, aux trois-quarts de la couche et au sol ; la figure 1 donne I/I_0 dans un plan azimutal quelconque pour la couche éclairée uniquement par un ciel de luminance I_0 ; la figure 2 donne I/F , dans le plan azimutal contenant le soleil et dans un plan perpendiculaire au précédent pour la couche éclairée uniquement par un soleil à 60° du zénith produisant l'éclairement πF au sommet de la couche sur un plan perpendiculaire à sa direction. Dans le cas pratique, où il y a simultanément les deux modes d'éclairage, le résultat s'obtient immédiatement en ajoutant le terme dû au soleil et le terme dû au ciel.

Nous avons considéré dans ces calculs que le sol était noir ; si on admet qu'il présente une réflexion diffuse suivant la loi de LAMBERT avec l'albédo r , on peut ajouter un terme correctif $I_R(\tau; \mu, \varphi)$ à $I(\tau; \mu, \varphi)$ en évaluant approximativement la luminance du sol

$$I_s = \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 [I(\tau; \mu, \varphi) + I_R(\tau; \mu, \varphi) \mu] d\mu d\varphi ;$$

I_R satisfait à une équation analogue à l'équation de transfert avec les conditions

$$\begin{cases} F = 0 \\ I_R(0; \mu < 0) = 0 \\ I_R(\tau_1; \mu > 0) = I_s. \end{cases}$$

Il ne semble d'ailleurs pas nécessaire de chercher un calcul très précis de ce terme, tant que nous ne posséderons pas plus de données sur la réflexion des sols.

Un calcul analogue au nôtre a été fait par J. OLIVIER [5, 6] pour la même couche éclairée par le soleil à 78° du zénith ; il serait souhaitable que ces calculs soient étendus à diverses couches et divers éclairages ; un bureau de calcul moyen pourrait certainement établir un nombre de diagrammes important, couvrant l'ensemble des cas usuels et fournissant des renseignements intéressants pour la navigation aérienne.

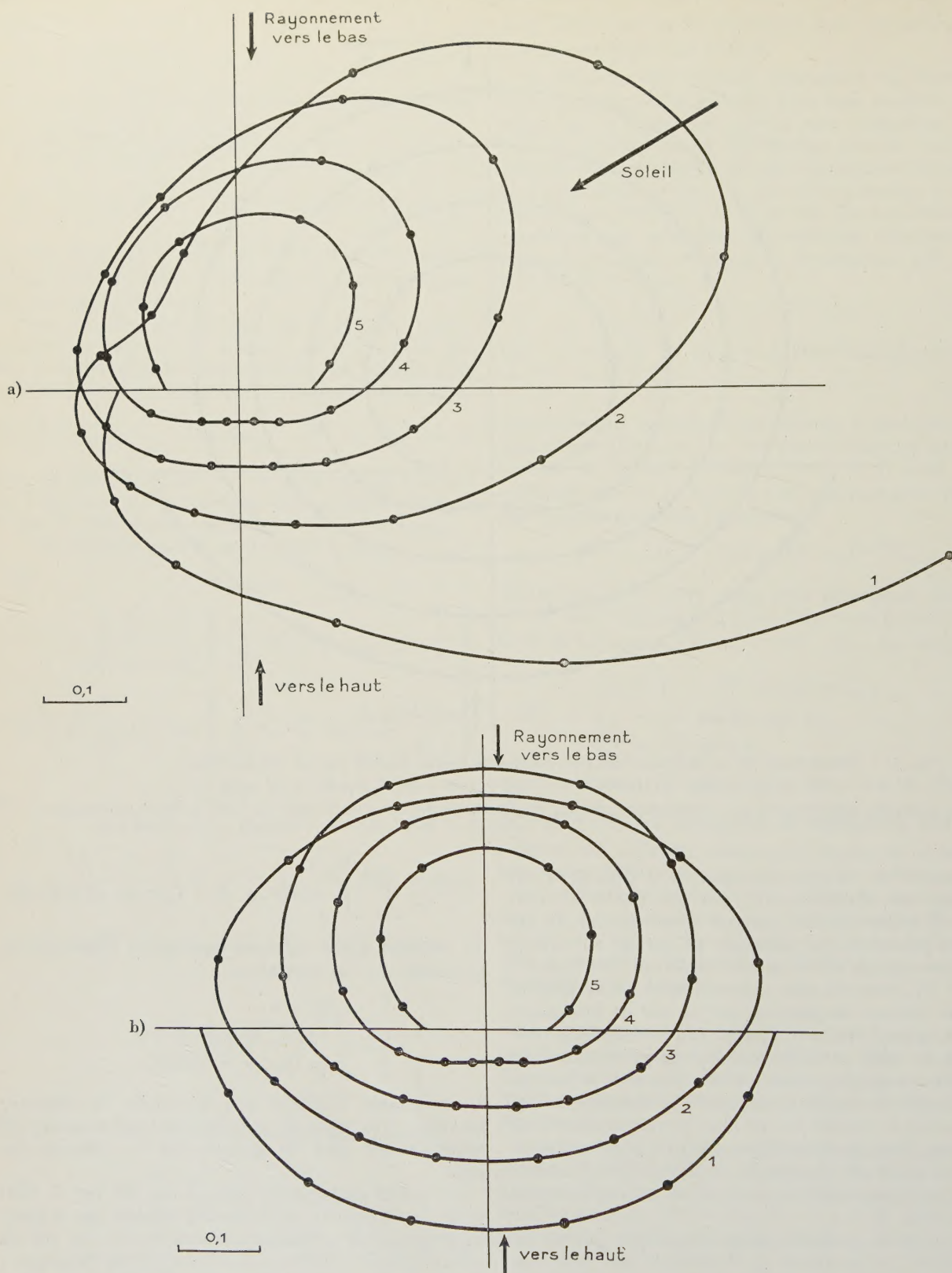


FIG. 2. — Répartition des luminances dans une couche de brume éclairée par le soleil à 60° du zénith.
 $(\tau_1 = 4,606 - p(\cos \Theta) = 1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta) - \text{sol noir})$.
 Les courbes représentent en coordonnées polaires $I(\tau; \mu)/F$ en fonction de θ .

a) dans le plan vertical contenant le soleil;

b) dans un plan vertical perpendiculaire au précédent.

1 — $\tau = 0$ (sommet de la couche); 2 — $\tau = 1,151$; 3 — $\tau = 2,303$; 4 — $\tau = 3,454$; 5 — $\tau = 4,606$ (sol).

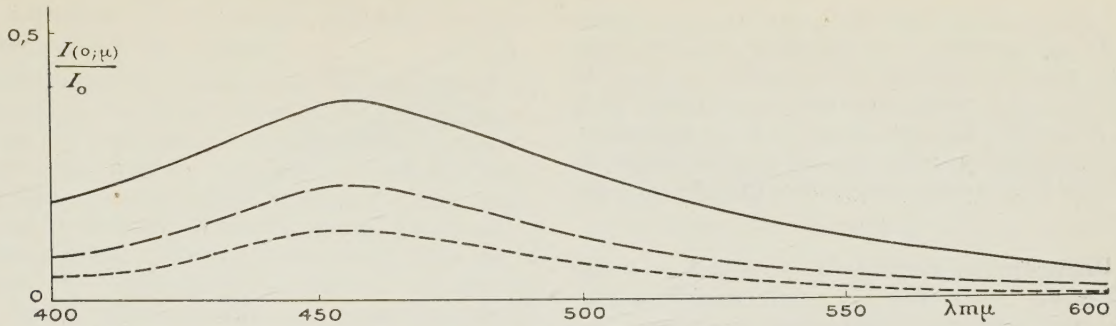


FIG. 3. — Répartition spectrale du rayonnement diffusé vers le haut par la mer (profondeur infinie. — $\beta = \beta$ eau distillée — $k = 0,17$ — ciel uniforme blanc)
 ————— $I(0; \theta = 76^\circ)/I_0$. - - - - - $I(0; \theta = 49^\circ)/I_0$ $I(0; \theta = 21^\circ)/I_0$.

III. Application à la mer. — L'eau de mer présente une absorption propre importante et très variable dans le spectre ; π_0 est alors un paramètre caractéristique de chaque eau pour chaque longueur d'onde. Sauf au voisinage immédiat des côtes, où le rôle du fond et l'étude de l'éclairage qu'il reçoit sont importants, on a généralement des profondeurs assez grandes pour considérer la mer comme un milieu diffusant de profondeur optique infinie.

Nous avons appliqué la méthode décrite précédemment à une mer de profondeur infinie, caractérisée par l'indicatrice de diffusion

$$p(\cos \Theta) = \pi_0 [1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta)]$$

avec diverses valeurs de π_0 , et éclairée soit par un ciel uniforme, soit par le soleil à 60° du zénith (dans l'air).

Si on considère une mer ayant l'absorption propre de l'eau distillée et une diffusion neutre telle que $\pi_0 = 0,65$ pour la longueur d'onde $500 \text{ m}\mu$, éclairée par un ciel blanc de luminance I_0 , la lumière renvoyée vers le haut a la répartition spectrale que montre la figure 3 [7] où on a porté $I(0; \mu)/I_0$ en fonction de la longueur d'onde λ pour un certain nombre de directions ; cette répartition, rapportée à l'étalon C de lumière blanche, correspond à une longueur d'onde dominante de $480 \text{ m}\mu$ environ, avec une pureté d'excitation de l'ordre de 65 % augmentant quand la direction d'observation se rapproche de la verticale ; cette mer apparaîtrait bleue à l'observateur situé dans l'air, par suite de son minimum d'absorption propre dans le bleu ; bien entendu, l'existence d'une diffusion sélective peut dans la réalité modifier plus ou moins cette couleur.

Les expressions de la luminance montrent que, aux grandes profondeurs, tous les termes de la somme d'exponentielles deviendront négligeables devant $e^{-k_1 \tau}$, k_1 étant la plus petite solution de l'équation caractéristique pour $m = 0$; on atteint alors un état d'équilibre où la répartition spatiale de luminance ne varie plus avec la profondeur, est indépendante de la répartition de l'éclairage en surface, présente la symétrie de révolution autour de la verticale et ne dépend que de π_0 et de l'indicatrice ; la figure 4 montre cette répartition d'équilibre en coordonnées polaires pour diverses valeurs de π_0 et avec l'indicatrice choisie ; la

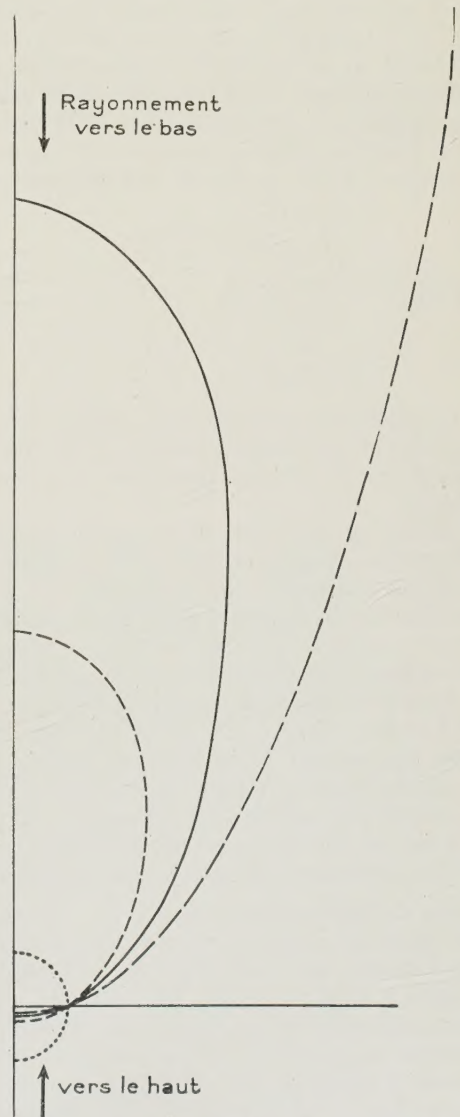


FIG. 4. — Répartition des luminances dans la mer à l'équilibre. Indicatrice $p(\cos \Theta) = \pi_0 [1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta)]$. Les courbes représentent, en coordonnées polaires, $I(\tau; \mu)/I(\tau; 0)$ en fonction de θ dans un demi-plan vertical quelconque

..... $\pi_0 = 1$. ————— $\pi_0 = 0,5$.
 - - - - - $\pi_0 = 0,66$. - - - - - $\pi_0 = 0,33$.

figure 5 donne la variation de k_1 avec ω_0 . La décroissance du rayonnement en profondeur est alors exponentielle avec le coefficient d'extinction k_1 $K \ll K$. L'expérience [8] semble confirmer ces résultats ; dans ce cas la mesure de l'extinction et de la répartition du rayonnement devrait permettre d'atteindre les coefficients d'absorption propre et de diffusion de l'eau de mer.

IV. Discussion. 1. *Précision de la méthode.* — Les propriétés du milieu diffusant étant supposées connues, et son indicatrice représentée exactement par l'expression employée pour $p(\mu, \varphi; \mu', \varphi')$, ce que nous discuterons plus loin, la seule approximation faite consiste dans l'emploi de la méthode des ordonnées discrètes, qui remplace une intégrale par une somme finie de $2n$ termes. La discussion de l'erreur ainsi introduite est, dans sa généralité, un problème mathématique compliqué. Nous nous bornerons à donner, sur 2 exemples, une idée qualitative de la précision à attendre. Pour la diffusion primaire avec une indicatrice isotrope, il est facile de calculer exactement

$$\int_{-1}^{+1} I(\tau; \mu') d\mu'$$

et de comparer le résultat à

$$\sum_{j=-n}^{+n} a_j I(\tau; \mu_j);$$

dès $n = 3$ l'écart est inférieur à quelques %, sauf quand τ devient infiniment grand ($\tau \gg 20$), c'est-à-dire au moment où la diffusion primaire est totalement négligeable.

Aux grandes profondeurs, on a vu qu'il s'établit un état d'équilibre régi par la plus petite solution k_1 de l'équation de transfert ; sur la figure 5 on a porté cette solution k_1 en fonction de ω_0 pour l'indicatrice $p(\cos \Theta) = \omega_0 [1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta)]$ à divers ordres d'approximation n ; on peut dire que $n = 2$ donne des résultats corrects à l'équilibre pour $\omega_0 > 0,5$ et $n = 3$ pour $\omega_0 > 0,3$; plus la diffusion est faible par rapport à l'absorption propre, plus il faut la calculer dans un ordre d'approximation élevée ; mais il ne faut pas oublier ici que la limite $\omega_0 = 0$ ne présente aucun intérêt pratique pour notre étude, puisqu'elle correspond au milieu non diffusant.

2. *Choix de l'indicatrice de diffusion.* — Nous avons employé dans les calculs qui précèdent une indicatrice représentée par une série de polynômes de LEGENDRE ; il n'est pas exclu, bien entendu, que des méthodes analogues de résolution puissent être appliquées avec d'autres formes d'indicatrices. Néanmoins la propriété d'additivité des polynômes de LEGENDRE présente de tels avantages pour la simplification des calculs qu'il semble souhaitable de remplacer l'indicatrice réelle du milieu par un développement en série de ces polynômes.

Indicatrices réelles. — L'indicatrice d'un milieu diffusant, caractéristique importante et physiquement

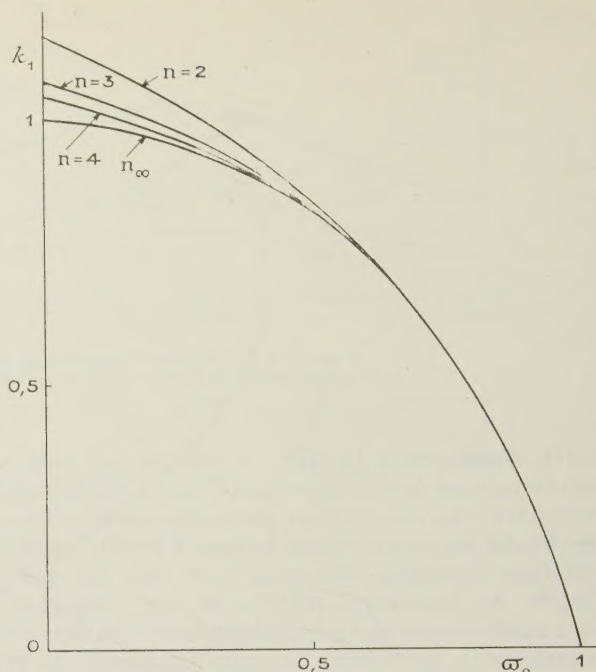


FIG. 5. — Variation de k_1 en fonction de ω_0 , à divers ordres d'approximation, pour l'indicatrice

$$p(\cos \Theta) = \omega_0 [1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta)].$$

bien définie du milieu, est en général très mal connue, son étude expérimentale directe est délicate au laboratoire et elle le devient encore beaucoup plus quand on veut travailler sur le terrain dans les milieux naturels comme la mer ou le brouillard.

Dans le cas de particules diffusantes sphériques, présentant ou non de l'absorption propre, la théorie de MIE donne le coefficient de diffusion et la forme de l'indicatrice pour chaque dimension de particules ; connaissant la granulométrie du milieu, la théorie permet donc de définir ses propriétés diffusantes ; pour les très grosses particules, le calcul des formules de MIE devient très pénible (*) et les lois de l'optique géométrique (diffraction et réflexion-réfraction) peuvent être appliquées. Pour la brume et le brouillard, où les particules diffusantes sont des gouttelettes d'eau, ces calculs semblent donner des résultats en très bon accord avec l'étude expérimentale directe. Pour la mer, nous possédons peu de renseignements sur la nature des particules diffusantes, mais il est probable qu'il en existe de forme plus ou moins complexe et non sphérique ; dans ce cas, l'étude théorique devient difficilement applicable et la seule solution reste l'étude directe des propriétés diffusantes du milieu.

D'une façon générale, il semble que dans les milieux naturels (mer et brume) les particules diffusantes sont d'assez grandes dimensions par rapport à la longueur

(*) Le calcul a été fait (9) jusqu'à $\alpha = \frac{2\pi r}{\lambda} = 40$, soit pour des diamètres de l'ordre de quelques microns pour le rayonnement visible.

d'onde et donnent des indicatrices de diffusion à maximum très marqué vers l'avant.

Développement des indicatrices en polynômes de LEGENDRE. — Le développement en série de polynômes de ces indicatrices à rapide variation est évidemment assez difficile ; avec peu de termes, toute formule, qui conserve bien le maximum avant, représente mal la diffusion dans les autres directions et vice-versa ; il faut donc choisir un compromis, ou, si l'on veut une représentation correcte, accepter de garder dans le développement un grand nombre de termes.

CHU et CHURCHILL [10], développant une idée de HARTEL, ont montré récemment dans un très intéressant travail que les formules de MIE peuvent facilement être transformées pour être mises sous la forme d'une somme de polynômes de LEGENDRE et ils ont entrepris les calculs numériques qui donneront les coefficients de ces développements ; le nombre de

termes à garder augmente évidemment avec la dimension des particules et serait de l'ordre de 2α . Pour les très grosses particules, il semble que l'on peut assimiler à la lumière transmise la lumière diffractée qui est concentrée dans un angle très faible et utiliser pour la réflexion-réfraction un développement de l'indicatrice de WIENER.

Pour représenter en série de polynômes de LEGENDRE

$$\frac{K}{4\pi} p(\cos \Theta) = \frac{K}{4\pi} \varpi_0 \left[1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n P_n(\cos \Theta) \right]$$

une indicatrice donnée par ses valeurs numériques (indicatrice de WIENER ou indicatrice expérimentale d'un milieu), diverses méthodes sont possibles : la plus élémentaire consiste à choisir arbitrairement N valeurs de Θ et à déduire les α_n du système à N équations ainsi obtenu ; cette méthode donne évidemment des résultats très variables suivant le choix des points et semble peu satisfaisante. On démontre mathématique-

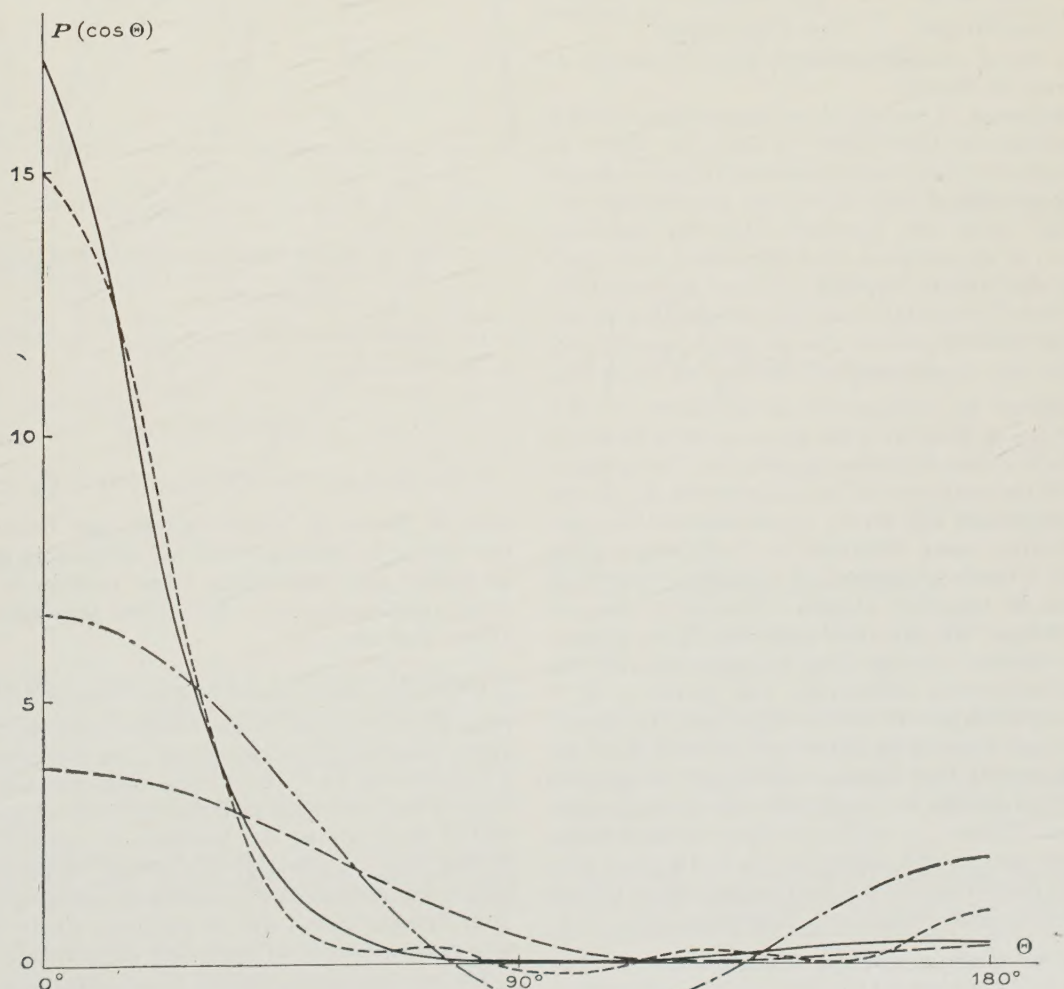


FIG. 6. — Développements de l'indicatrice de WIENER.

— — — — — $p(\cos \Theta)$ d'après WIENER.
 - - - - - $p(\cos \Theta) = 1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta)$.
 - $p(\cos \Theta) = 1 + 2,33 P_1(\cos \Theta) + 3,31 P_2(\cos \Theta)$.

..... $p(\cos \Theta) = 1 + 2,33 P_1(\cos \Theta) + 3,31 P_2(\cos \Theta) + 2,89 P_3(\cos \Theta) + 2,47 P_4(\cos \Theta) + 1,79 P_5(\cos \Theta) + 1,20 P_6(\cos \Theta)$.

ment qu'on obtient l'approximation en moyenne (*) en calculant les coefficients α_n par la formule

$$\frac{K\varpi_0}{4\pi} \frac{2}{2n+1} \alpha_n = \int_{-1}^{+1} \frac{K}{4\pi} p(\cos \Theta) P_n(\cos \Theta) d(\cos \Theta);$$

nous avons calculé ainsi les 7 premiers coefficients pour l'indicatrice de WIENER : $\alpha_1 = 2,33$; $\alpha_2 = 3,31$; $\alpha_3 = 2,89$; $\alpha_4 = 2,47$; $\alpha_5 = 1,79$; $\alpha_6 = 1,20$; $\alpha_7 = 0,93$. Une autre méthode qui semble physiquement la plus logique consiste à écrire que la proportion de flux diffusé dans un nombre N d'angles déterminés est conservée ; là encore il existe une arbitraire dans le choix des angles utilisés ; en divisant l'intervalle $0-\pi$ de variation de Θ en intervalles égaux, on obtient dans les premiers ordres pour l'indicatrice de WIENER des coefficients assez proches de ceux donnés ci-dessus ; au contraire le développement d'ordre 2 ($\alpha_1 = 1,73$; $\alpha_2 = 1$) employé dans les paragraphes précédents, correspond approximativement à la conservation des rapports $\frac{\text{flux } 0^\circ-90^\circ}{\text{flux } 90^\circ-180^\circ}$ et $\frac{\text{flux } 0^\circ-45^\circ}{\text{flux } 135^\circ-180^\circ}$. La figure 6 montre à titre d'exemples quelques développements de l'indicatrice de WIENER.

En conclusion, il semble donc que si l'on connaît bien l'indicatrice d'un milieu et que l'on désire en tenir compte avec une bonne précision, il faut employer un développement d'ordre élevé, qui entraîne des calculs longs, mais très possibles avec les machines modernes ; si au contraire on veut arriver aux résultats par des calculs rapides, il faut se contenter, comme nous l'avons fait dans les paragraphes précédents, d'un développement d'ordre faible, qui ne peut représenter que grossièrement l'indicatrice du milieu.

3. *Influence de l'indicatrice de diffusion.* — Un problème qui se pose alors est de savoir si la forme de l'indicatrice a une influence importante sur la pénétration du rayonnement et par conséquent si l'on risque de commettre une erreur appréciable en utilisant une indicatrice assez différente de l'indicatrice réelle du milieu. L'étude générale de ce problème à partir de l'équation de transfert semble complexe ; mais on peut se donner une idée des phénomènes en comparant des résultats obtenus dans le même cas avec des formes d'indicatrice différentes. Les figures 7 et 8 donnent des exemples de cette comparaison ; la figure 7 se rapporte à l'état d'équilibre qui s'établit dans un milieu de profondeur infinie, tandis que la figure 8 concerne une couche de brume sans absorption propre d'épaisseur totale $\tau_1 = 4,606$ au-dessus d'un sol noir et éclairée par un ciel uniforme. Dans les deux cas, l'écart des résultats n'est pas énorme pour deux formes d'indicatrices aussi totalement différentes que

(*) C'est le développement qui rend minimum

$$\int_{-1}^{+1} \left| \frac{K}{4\pi} p(\cos \Theta) - \frac{K\varpi_0}{4\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n P_n(\cos \Theta) \right] \right|^2 d(\cos \Theta)$$

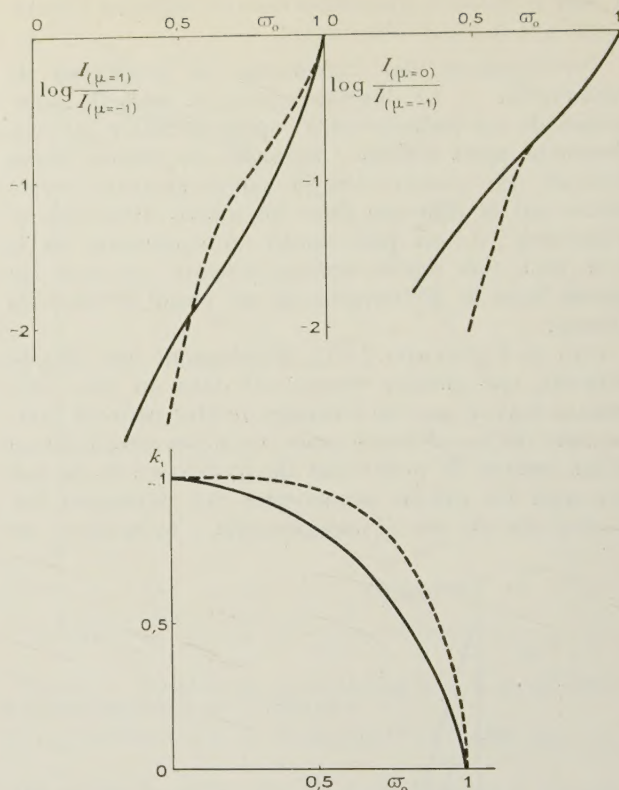


FIG. 7. — Etat d'équilibre pour les indicatrices :

$$\text{—} \quad p(\cos \Theta) = \varpi_0 [1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta)] .$$

$$\text{---} \quad p(\cos \Theta) = \varpi_0$$

Les courbes représentent k_1 , $\log \frac{I(\mu=1)}{I(\mu=-1)}$ et $\log \frac{I(\mu=0)}{I(\mu=-1)}$ en fonction de ϖ_0 .

$$p(\cos \Theta) = \varpi_0$$

et

$$p(\cos \Theta) = \varpi_0 [1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta)] ;$$

pour la brume les points calculés par OLIVIER, avec une méthode différente, ont été obtenus en attribuant au milieu une indicatrice assez voisine de celle de GUMPRECHT pour $\alpha = 30$; cette indicatrice a une allure analogue à

$$p(\cos \Theta) = \varpi_0 [1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta)] ,$$

mais s'en distingue essentiellement par le maximum avant beaucoup plus important ; les résultats pour ces 2 indicatrices sont très voisins. Bien entendu, l'hypothèse d'une diffusion isotrope est trop éloignée de la réalité pour donner des résultats acceptables, mais il semble que, en général, il n'est pas nécessaire d'employer rigoureusement l'indicatrice réelle du milieu pour obtenir mieux que la précision de 10 % qui est très acceptable dans l'étude des phénomènes naturels.

Le rayonnement venant d'une direction déterminée ayant subi une seule diffusion a exactement la répartition donnée par l'indicatrice, alors que le rayonnement ayant subi un grand nombre de diffusions sous des angles divers, doit être très peu influencé par la forme de l'indicatrice ; il serait donc intéressant d'envisager

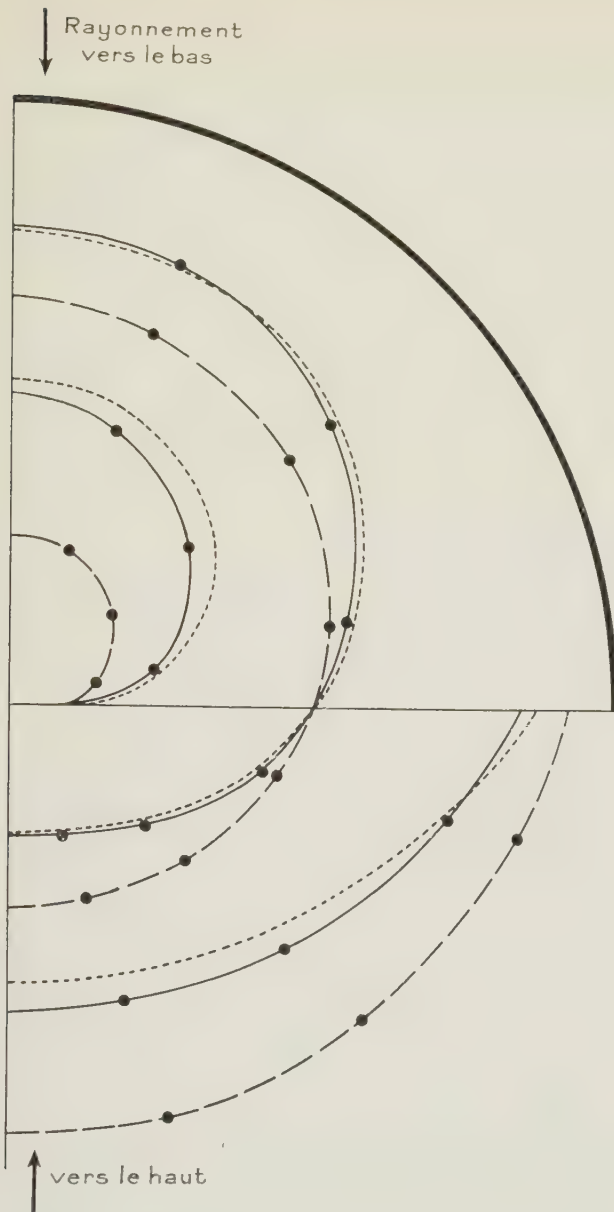


FIG. 8. — Répartition des luminances dans une couche de brume ($\sigma_0 = 1 - \tau_1 = 4,606$ — ciel uniforme — sol noir) pour les indicatrices :

— $p(\cos \Theta) = \sigma_0 [1 + 1,73 P_1(\cos \Theta) + P_2(\cos \Theta)]$,
 - - - $p(\cos \Theta) = \sigma_0$,
 indicatrice de GUMPRECHT pour $\alpha = 30$ (calculs de J. OLIVIER).

La figure représente, en coordonnées polaires, I en fonction de θ dans un demi-plan vertical quelconque, pour le sommet de la couche, le milieu et le sol. En trait épais — luminance du ciel I_0 .

sager la proportion dans le rayonnement total des divers ordres de diffusion ; dans les cas où la diffusion primaire est importante et où la couche est éclairée par le soleil direct, il est souhaitable et facile de faire une correction tenant compte de la forme de l'indicatrice pour ce terme que l'on peut calculer exactement :

$$(10) \left\{ \begin{aligned} I^1(\tau; \mu < 0, \varphi) &= \frac{F}{4} p(\mu, \varphi; \mu'_0, \varphi'_0) \frac{\mu'_0}{\mu'_0 - \mu} \times \\ &\times [e^{\tau/\mu'_0} - e^{\tau/\mu}] \\ I^1(\tau; \mu > 0, \varphi) &= \frac{F}{4} p(\mu, \varphi; \mu'_0, \varphi'_0) \frac{\mu'_0}{\mu'_0 - \mu} \times \\ &\times [e^{\tau/\mu'_0} - e^{\tau/\mu + \tau_1/\mu'_0 - \tau_1/\mu}] \end{aligned} \right.$$

4. Rôle des divers ordres de diffusion. — Si nous séparons la luminance globale I en une somme de termes correspondant à la luminance du rayonnement ayant subi 0, 1, 2... n... diffusions :

$$(11) \quad I(\tau; \mu, \varphi) = I^0(\tau; \mu, \varphi) + I^1(\tau; \mu, \varphi) + \dots + I^n(\tau; \mu, \varphi) + \dots$$

on peut remplacer l'équation de transfert par le système d'équations :

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \mu \frac{dI^0(\tau; \mu, \varphi)}{d\tau} &= I^0(\tau; \mu, \varphi) \\ \mu \frac{dI^1(\tau; \mu, \varphi)}{d\tau} &= I^1(\tau; \mu, \varphi) - \\ &- \frac{1}{4} p(\mu, \varphi; \mu'_0, \varphi'_0) F e^{\tau/\mu'_0} \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') I^0(\tau; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \\ \mu \frac{dI^n(\tau; \mu, \varphi)}{d\tau} &= I^n(\tau; \mu, \varphi) - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \times \\ &\times I^{n-1}(\tau; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \end{aligned} \right.$$

pour $n = 1, 3, \dots$

avec les conditions aux limites :

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} I^{n \neq 0}(0; \mu < 0) &= 0 \text{ et } I^0(0; \mu < 0) = I_0 \\ I^n(\tau_1; \mu > 0) &= 0. \end{aligned} \right.$$

On peut résoudre ces équations par itération, à partir de I^1 , en séparant les termes en $\cos m(\varphi - \varphi'_0)$ et en remplaçant l'intégrale de -1 à $+1$ sur μ' par une somme d'un nombre fini de termes, comme pour l'équation de transfert.

Exemple. — Nous avons fait ainsi le calcul des divers ordres de diffusion jusqu'à 6, ainsi que le calcul du rayonnement global, dans le cas simple de la diffusion isotrope ($p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \sigma_0$) pour une couche de profondeur infinie, éclairée uniquement par le soleil à 60° du zénith.

La figure 9 montre les résultats obtenus sous la

forme I^1/I , $\sum_{n=1}^3 I^n/I$ et $\sum_{n=1}^6 I^n/I$ en fonction de τ et pour

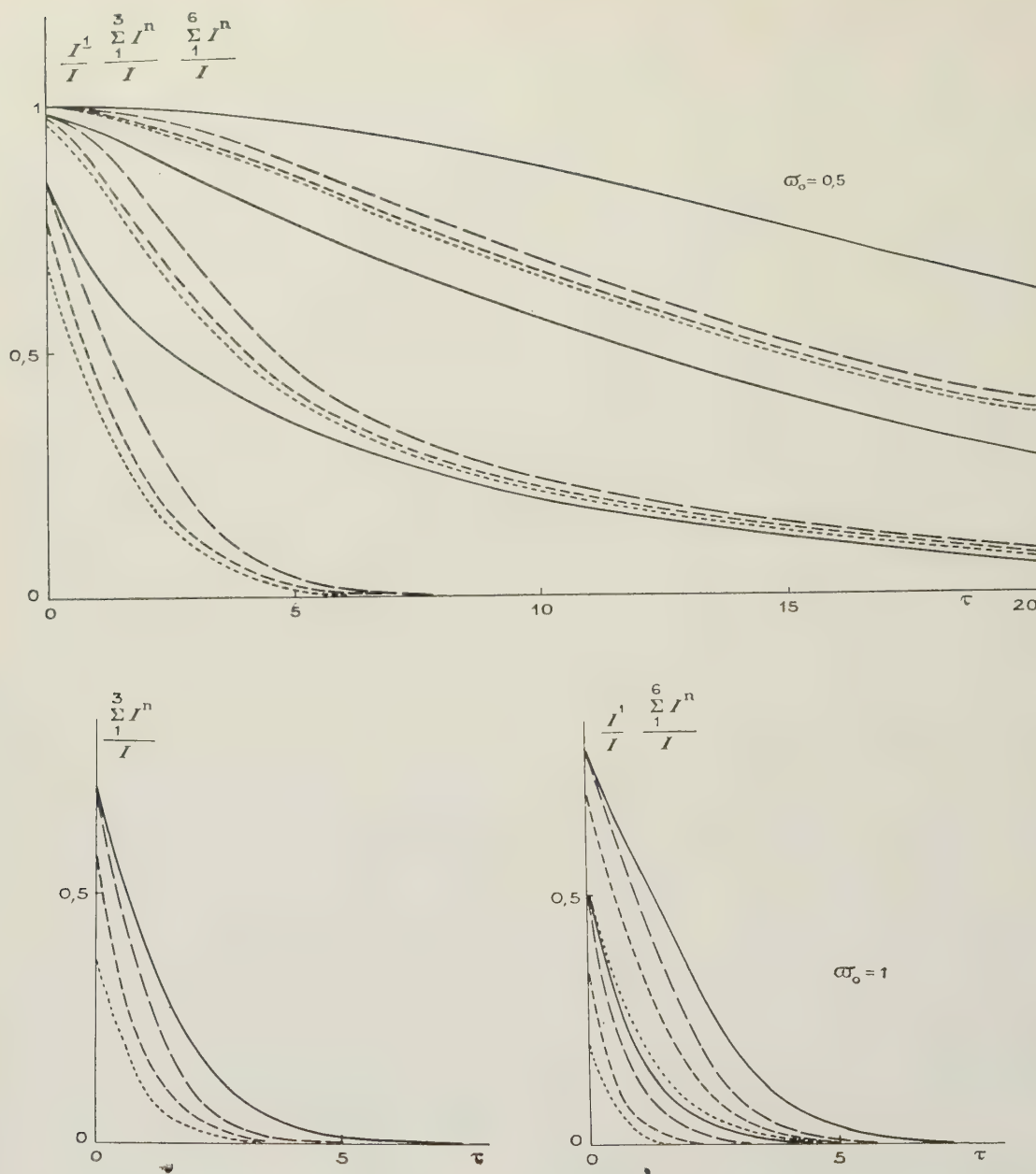


FIG. 9. — Rôle des divers ordres de diffusion.
Couche de profondeur infinie — diffusion isotrope — soleil à 60° du zénith — en haut $\varpi_0 = 0,5$; en bas $\varpi_0 = 1$.
Les courbes représentent t

$$I^1/I, \sum_{n=1}^3 I^n/I \text{ et } \sum_{n=1}^6 I^n/I$$

en fonction de τ pour les directions

$\theta = 159^\circ$ —————
 $\theta = 104^\circ$ - - - - -

$\theta = 76^\circ$ - · - · - ·
 $\theta = 21^\circ$

une série de directions, dans le cas $\varpi_0 = 1$ (milieu sans absorption propre) et dans le cas $\varpi_0 = 0,5$ (absorption propre égale à l'absorption par diffusion). Bien entendu, ces courbes doivent varier avec la forme de l'indicatrice choisie, les conditions d'éclairage, et être

modifiée par la présence d'un sol à profondeur finie, mais elles nous semblent intéressantes par les conclusions qualitatives qu'elles permettent de tirer. La part des diffusions d'ordre faible et en particulier de la diffusion primaire est minimum pour le rayonne-

ment de bas en haut et maximum pour le rayonnement à la verticale de haut en bas, ce qui s'explique facilement par le rôle du rayonnement diffusé près de la surface et transmis par le plus court chemin à la profondeur considérée. Dans les milieux sans absorption propre, les diffusions d'ordre élevé deviennent très rapidement prépondérantes ; dans notre exemple la diffusion primaire ne représente que 10 % du rayonnement global dès une profondeur optique de l'ordre de $\tau = 0,5$ pour le rayonnement de bas en haut et de l'ordre de $\tau = 1,5$ pour le rayonnement de haut en bas ; à $\tau = 4$, les 6 premiers ordres de diffusion représentent pour toutes les directions moins de 10 % du rayonnement global. Quand il y a un terme d'absorption propre, une même profondeur optique correspond à un moins grand nombre de particules diffusantes et l'importance des diffusions d'ordre élevé n'augmente que beaucoup plus lentement ; pour $\tau_0 = 0,5$ toujours dans notre exemple, la diffusion primaire est réduite à 10 % du rayonnement global vers $\tau = 3$ pour le rayonnement de bas en haut et seulement vers $\tau = 15$ pour le rayonnement de haut en bas ; pour cette direction de haut en bas, les 6 premiers ordres représentent pratiquement tout le rayonnement jusqu'à $\tau = 4$, les 3 premiers ordres jusqu'à $\tau = 1$.

Il semble donc que pour les milieux où la diffusion est prépondérante, dès une faible profondeur, le calcul global avec une indicatrice de diffusion grossière doit donner des résultats raisonnables ; au voisinage immédiat de la surface (*) et surtout pour le rayonnement dirigé vers le bas, il sera bon de calculer exactement le terme de diffusion primaire avec l'indicatrice réelle et de faire la correction. Pour les milieux, où l'absorption propre est importante, au voisinage de la surface, il sera souvent préférable de calculer exactement par itération les premiers ordres de diffusion qui représentent la presque totalité du rayonnement (**); quand la profondeur optique augmente, le

(*) Par une discussion un peu différente, OLIVIER a montré également qu'au voisinage de la surface, il faut tenir compte de la forme exacte de l'indicatrice et surtout de son important maximum avant.

(**) Généralement dans ce cas, le rayonnement décroît approximativement en progression géométrique quand l'ordre de diffusion croît et on peut utiliser cette loi pour évaluer le petit terme correctif à ajouter aux premiers ordres calculés.

calcul global redevient le plus avantageux, mais il sera bon de calculer exactement le terme de diffusion primaire jusqu'à des profondeurs assez importantes.

V. Conclusion. — La méthode de CHANDRASEKHAR permet par des moyens mathématiquement simples, de résoudre l'équation de transfert qui régit la pénétration du rayonnement dans un milieu diffusant ; en employant des développements à un nombre suffisant de termes, ce qui est possible avec les machines à calculer modernes, il semble que l'on peut atteindre toute la précision désirée. Si plus modestement on se limite aux calculs possibles à la main, avec des développements à 2 ou 3 termes, on obtient sans peine des résultats, qui dans l'ensemble sont certainement corrects à mieux de 10 % et donc parfaitement utilisables dans la pratique (visibilité dans la brume, éclairage sous-marin) ; mais alors, comme toute approximation, ces calculs doivent être appliqués sans perdre de vue la réalité physique et il peut être nécessaire dans certains cas de les compléter et de les corriger par une évaluation précise des premiers ordres de diffusion, ceci en particulier quand la couche est éclairée par le soleil, au voisinage immédiat du sommet s'il n'existe pas d'absorption propre, et jusqu'à des profondeurs d'autant plus grandes que le terme d'absorption propre devient plus important par rapport à la diffusion.

BIBLIOGRAPHIE

1. CHANDRASEKHAR (S.), *Radiative Transfer*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
2. LENOBLE (J.), *Rev. d'Opt.*, **35**, 1956, 1.
3. LENOBLE (J.), *C. R. Ac. Sc.*, **242**, 1956, 1865.
4. LENOBLE (J.), *Jl Sci. de la Météo.*, **8**, 1956, 23.
5. OLIVIER (J.), *Bulletin S. F. E.*, n° 56, août 1955.
6. OLIVIER (J.), *La Météo.*, 1954, 57.
7. LENOBLE (J.), *C. R. Ac. Sc.*, **242**, 1956, 662.
8. LENOBLE (J.), *Ann. de Géophys.*, **12**, 1956, 16.
9. GUMPRECHT (R. O.), SUNG (N. L.), CHIN (J. H.), SLIEPCEVICH (G. M.), *J. O. S. A.*, **42**, 1952, 226.
10. ARTEL (W.), *Das Licht*, **40**, 1940, 141 ; CHU (C. M.), CHURCHILL (S. W.), *J. O. S. A.*, **45**, 1955, 958.

Manuscrit reçu le 10 octobre 1956.

Image quality and optical resolution

E. H. LINFOOT, The Observatories, University of Cambridge

SUMMARY. — A brief account is given of the reasons why the classical notion of resolving power fails to provide a satisfactory quality criterion of optical systems designed to form images of extended objects. The discussion indicates that a quantity here called the structural resolving power, which is formally identical with an assessment proposed independently by SCHADE (1952) and FELLGETT (1953), seems well suited to replace the old notion of resolution limit in evaluating the images of extended objects. On the basis of known results about images by systems with annular apertures, and of the rather close relation between the structural resolving power of an optical system and its information-passing capacity, it is concluded that the image of an extended object showing low-contrast fine structure begins to show visible deterioration when the reduction in the structural resolving power of the optical system by aberrations or by central obstruction reaches about 20 per cent.

SOMMAIRE. — L'auteur rappelle brièvement les raisons pour lesquelles la notion classique de pouvoir séparateur ne peut fournir un criterium de qualité satisfaisant pour les systèmes optiques calculés pour la formation d'images d'objets étendus.

La discussion montre qu'une grandeur appelée ici pouvoir séparateur de structure, tout à fait analogue à une grandeur définie indépendamment par SCHADE en 1952 et par FELLGETT en 1953, semble bien convenir au remplacement de l'ancienne notion de limite de résolution pour l'appréciation des images d'objets étendus.

En s'appuyant sur les résultats connus concernant les images formées par des systèmes à ouvertures annulaires et sur la relation étroite existant entre le pouvoir séparateur de structure d'un système optique et sa capacité de transmission d'information, on conclut que l'image d'objets étendus ayant une structure fine faiblement contrastée commence à s'altérer visiblement quand la réduction du pouvoir séparateur de structure du système due aux aberrations ou à une obturation centrale atteint environ 20 %.

ZUSAMMENFASSUNG. — Es werden kurz die Gründe dargelegt, warum der klassische Begriff des Auflösungsvermögens als Gütekriterium versagt, wenn man ihn auf optische Systeme anwenden will, die für die Abbildung ausgedehnter Objekte bestimmt sind. Eine Grösse, die hier "Strukturauflösung" genannt wird und im Wesentlichen mit der von SCHADE (1952) und FELLGETT (1953) vorgeschlagenen Festsetzung übereinstimmt, scheint jedoch gut geeignet zu sein, für die Beurteilung der Abbildung ausgedehnter Objekte die alte Definition des Auflösungsvermögens zu ersetzen. Die bekannten Ergebnisse bei der Abbildung durch Systeme mit ringförmiger Pupille und die enge Beziehung zwischen der Strukturauflösung und der Informationskapazität optischer Systeme lassen schliessen, dass das Bild eines ausgedehnten Objektes mit feinen kontrastarmen Einzelheiten eine deutliche Verschlechterung erst dann zeigt, wann die Strukturauflösung des optischen Systems infolge von Aberrationen oder von einer zentralen Abblendung um 20 % zurückgeht.

I. Generalities. — The classical notion of resolving power was never precisely formulated except in a few very special cases, and has consequently been found insufficient for the needs of present-day instrumental optics. Something like a crisis has been reached in the last few years and, as stated by G. TORALDO in a recent paper [1], the theory of optical resolving power is at present undergoing a transformation. The difficulties which have hitherto prevented the idea of optical resolution from receiving a general analytical formulation seem to arise in part from its having been too closely linked with the notion of a sufficient separation between the central peaks of the diffraction images of two neighbouring bright points in the object surface. This may have led to the assumption that the power of an optical system to reproduce fine detail in the images of continuous objects could somehow be measured by a single number, called the resolution limit. There is, for good reason, no generally agreed definition of the meaning of this term. The resolution limit of an aberration-free system is often taken to be that angular separation of two bright object points which places the geometrical image of each on the first AIRY dark ring in the diffraction image of the other, and the "RAYLEIGH resolution limit" defined in this way agrees moderately well with the value (about $0''.57$ of arc for an 8-inch aperture) adopted by DAWES as a result of his observations of double stars. But, besides involving rather artificial assumptions about what is meant by fully resolved, the very concept of a resolution limit presupposes, as was pointed out by TORALDO (l. c. [1]), that the observer knows in

advance a great deal about the structure of the object; in the present instance that it consists of either one or two bright points. Toraldo has further pointed out that, since many different intensity distributions in the object surface may yield exactly the same diffraction image, it is only when the observer is able to choose from among these distributions on the basis of prior information about the object that it is permissible to speak at all of resolution in the conventional sense.

In the majority of practical cases, the available prior information about the object is quite insufficient to make it possible to proceed in this way, and the question arises whether an acceptable definition of resolution can be formulated which is applicable to the imaging of continuous objects about which little is known beforehand. The discussion of this question is the main object of the present paper.

In many present-day applications the leading requirement is that previously unspecified fine detail in a continuous object shall appear in its image with sufficient contrast to emerge from the "noise" of a photographic negative or print and with sufficient fidelity to be interpretable. Metamorphosis of fine detail will not necessarily prevent its being correctly interpreted by a practised observer, but it will in general make recognition more difficult and so reduce the total amount of detail recognised.

Recognition of metamorphosed details can be regarded as a decoding of the image, and if this decoding entailed no loss of information in practice it would be by the power to discriminate, in its images, between

one object and another that an optical system could most realistically be assessed. As already mentioned, decoding by image interpretation is probably not fully efficient, and the use of image-reconstruction methods (optical or electronic) to improve fidelity is a complication which is not acceptable in many applications. Nevertheless, it seems a reasonable starting point to consider how far the notion of optical resolution may agree with that of the discriminating power of an optical system, here defined as the logarithm of the effective number of distinguishable images [2] which it forms when presented with a statistically characterised object set.

Discriminating power in this sense agrees in value with the statistical mean information content of an image for the given object set; and its value depends on the characteristics of the object set as well as on the optical design. This dependence is entirely in accord with intuitive ideas about discriminating power and about information, but does not agree well with the conventional notion of optical resolution, which is usually thought of as a property of the optical system *per se*. It follows that we cannot obtain a satisfactory analytical realisation of the conventional notion of optical resolution simply by identifying it with discriminating power.

The essential difficulty can be traced to the fact that in order to specify the discriminating power of an optical system for all object sets we require, not a single number, but a function, for example the τ function (response function) of the system [3], while the notion of optical resolution purports to assess discriminating power, in some sense of the term, by a single figure of merit.

II. Structural resolution. — A useful figure of merit can, however, be obtained by defining the optical resolution of a system as its normalised discriminating power for those object sets which, in a certain sense, test it most searchingly, namely random low-contrast object sets $\{\sigma(x, y)\}$ in which the structure is only just discernable through the photon noise [4]. It can be shown that the assumption of randomness (interpreted as greatest entropy/power ratio) implies that the statistical mean structure-power is equally distributed among all the spatial "sampling frequencies" (u_p, v_q) which are passed by the system, that the different frequencies (u_p, v_q) are statistically uncorrelated, and that the probability distribution of the coefficient α_{pq} of a given term $\alpha_{pq} \exp \{2\pi i(u_p x + v_q y)\}$ in the double FOURIER expansion

$$\sigma(x, y) = \sum_{p, q} \alpha_{pq} \exp \{2\pi i(u_p x + v_q y)\} \quad (x, y) \text{ in } A$$

$$(1) \quad = 0 \quad (x, y) \text{ not in } A$$

of $\sigma(x, y)$ over the isoplanatism patch

$$A \text{ (— } a \leq x \leq a, \text{ — } b \leq y \leq b)$$

is Gaussian to a sufficient approximation.

Then the discriminating power of the system working in the isoplanatism patch A is given by the expression [5]

$$(2) \quad |A| \frac{P}{2N} \iint_{-\infty}^{\infty} |\tau_A(u, v)|^2 du dv,$$

where $\tau_A(u, v)$ is the response function (FOURIER transform of the "spread function") of the system in the isoplanatism patch A, while P and N denote respectively the statistical mean structure power in the object set and the photon noise-power level, so that $P/2N$ is proportional to the mean brightness. We normalise the discriminating power (2) by removing the factor $|A|P/2N$ and define the *structural resolution* or *structural resolving power* of the optical system as the number

$$(3) \quad R_A = \iint_{-\infty}^{\infty} |\tau_A(u, v)|^2 du dv.$$

It is very interesting that this quantity R_A , rather closely related in the low-contrast case to the information-passing capacity of the system, is identical [6] with an assessment of image quality already proposed independently by O. H. SCHADE [7] and by P. B. FELLGETT [8]. In a correctly focussed aberration-free monochromat with circular aperture, it is equal to 0.168 times the number of AIRY discs in the receiving surface per unit solid angle in the object surface. The effect of defocussing is shown in figure 1, which was computed from H. H. HOPKINS's response function curves [9]. It will be seen that even 1/4 fringe of defocussing reduces the value of R_A by more than 30 per cent.

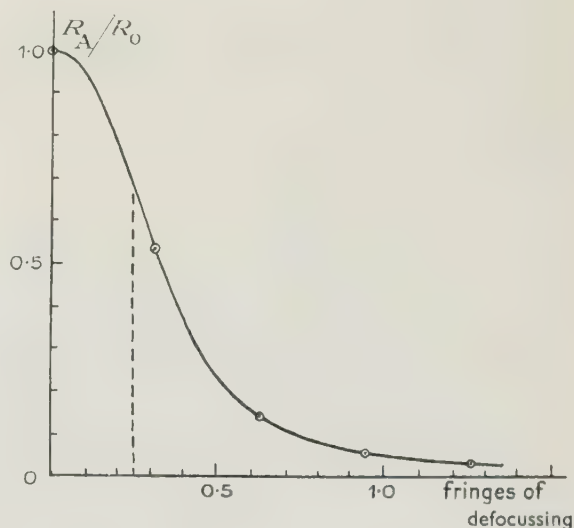


FIG. 1. — Effect of defocussing on the structural resolving power of an aberration-free optical system. The dotted line corresponds to the Rayleigh quarter-wave limit. The ordinates show the values of R_A/R_0 , where $R_0 = (f^2 \sin^2 \alpha)/0.696 \lambda^2$ is the structural resolving power of a perfectly focussed system.

Since there is some reason (see § 3 below) to believe that a barely visible deterioration in image quality corresponds to a drop of about 20 per cent in structural resolution, figure 1 is in good agreement with CONRADY'S remark [10] that although the RAYLEIGH quarter-wave tolerance limit is abundantly justified so far as the resolution of point sources is concerned, it might with advantage be tightened to 1/6 or even 1/8 of a wavelength for instruments intended to form high-quality images of extended objects.

In the practically important case of a non-isoplanatic system imaging polychromatic light, the *local structural resolution* at the point (x, y) of the field may be defined as the quantity

$$(4) \quad R_{x,y} = \iint_{-\infty}^{\infty} |\tau(u, v; x, y)|^2 du dv,$$

where $\tau(u, v; x, y)$ is the "polychromatic local response function" at (x, y) .

The structural resolution R of the system over a given working field F is then defined as the mean value of $R_{x,y}$ over F :

$$(5) \quad R = \frac{1}{|F|} \iint_F R_{x,y} dx dy.$$

The *equivalent band radius* r of the optical system working over the field F may be defined as the radius of a circle of area R in the frequency plane; that is to say, by the equation

$$\pi r^2 = R.$$

In an aberration-free monochromat the reciprocal diameter $1/2r$ of this circle is equal to 1.22 times the RAYLEIGH resolution limit. The reciprocal diameter of the circle of spatial frequencies passed by the system is $\pi/7.66 = 0.41$ times the RAYLEIGH resolution limit. The radius of this circle defines the spatial frequency cut-off of the system, beyond which τ is always zero; it corresponds to a line spacing in the image surface equal to λ times the focal ratio. Aberrations, including defocussing, leave the spatial frequency cut-off unaltered, but reduce the equivalent band radius by reducing $|\tau(u, v)|$.

The content of these remarks may be summarised as follows: an optical system imaging incoherent objects is characterised by its monochromatic local response function $\tau(u, v; x, y; \lambda)$. To abstract a figure of merit from this characterisation is equivalent, generally speaking, to forming a weighted functional mean of $\tau(u, v; x, y; \lambda)$, and the present discussion indicates that the functional mean which seems to correspond best with the old idea of resolving power in polychromatic light of given spectral distribution is the *structural resolution*

$$(6) \quad R = \frac{1}{|F|} \iint_F dx dy \iint_{-\infty}^{\infty} |\tau(u, v; x, y)|^2 du dv,$$

where the polychromatic local response function $\tau(u, v; x, y)$ satisfies the equation

$$(7) \quad \tau(u, v; x, y) = \int \rho(\lambda; x, y) \tau(u, v; x, y; \lambda) d\lambda$$

and $\rho(\lambda; x, y)$ is the effective spectral distribution of the light issuing from the object surface element situated at (x, y) . The local structural resolution (4) is identical with an assessment of image quality already proposed by SCHADE and FELLGETT independently.

III. Image quality tolerances in terms of structural resolution. — Some idea of the visual effect of a specified drop in structural resolution may be gained by examining, as a particular case of practical importance, the reproduction of fine detail in paraxial images formed by ordinary Newtonian reflecting telescopes. Astronomical observers agree that with an obstruction ratio of less than 0.25 there is no appreciable deterioration of the image, but that the use of a diagonal flat of (linear) obstruction ratio greater than 0.25 noticeably impairs the observation of planetary detail; and similar conclusions have been arrived at by visual users of reflecting microscopes [12].

The effects of central obstruction on the transmission function of an aberration-free monochromat are easily calculated, since the response function $\tau(u, v)$ is the area common to two annuli in the (u, v) -plane (frequency plane), each similar to the clear aperture (see fig. 2), with their centres at a distance $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$

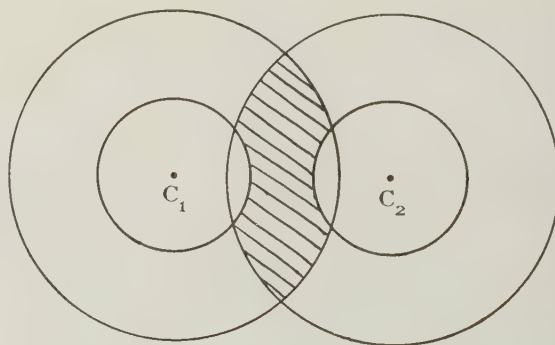


FIG. 2. — Calculation of response function for an aberration-free system with central obstruction. The value of $\tau(u, v)$ is given, apart from a normalising constant, by the area of the shaded region when $C_1 C_2 = \sqrt{u^2 + v^2}$. The radius of each of the large circles is ω_0 , where $2\omega_0$ is the spatial cut-off frequency.

apart. Figure 3 shows τ -curves, obtained (with one exception) by measuring these areas with a planimeter, for a selected set of values of the obstruction ratio [13]; the parameter S is defined as the ratio ω/ω_0 , where $2\omega_0$ is the cut-off frequency of the system for self-luminous objects. Figure 4 shows the effect of central obstruction on the structural resolution of the system. From this figure we see that a central obstruction-ratio of 0.25 corresponds, in an aberration-free monochromat, to a drop of about 18 per cent in the structural resolution.

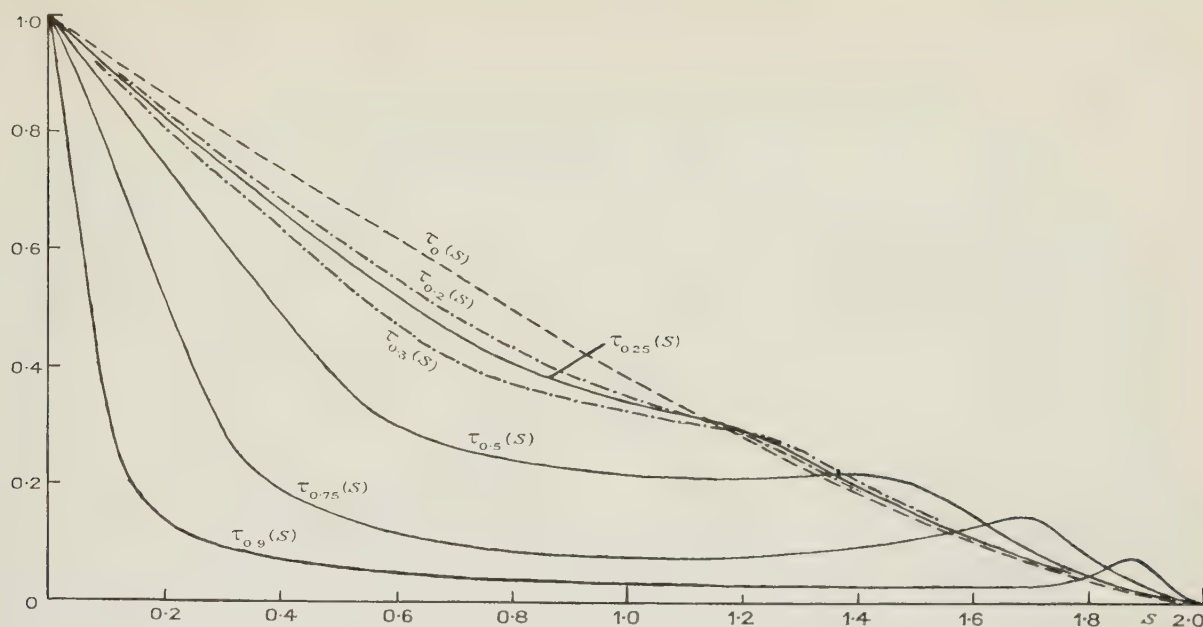


FIG. 3. — Response functions $\tau(u, v) = \tau(s)$ of aberration-free monochromats with different amounts of central obstruction. The parameter $s = \omega/\omega_0$, where $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$ and $2\omega_0$ is the spacial cut-off frequency for self-luminous objects.

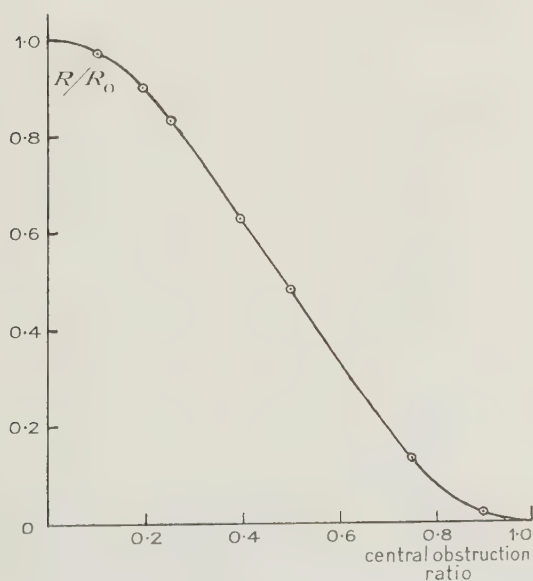


FIG. 4. — Effect of central obstruction on the structural resolving power of an aberration-free monochromat. $R_0 = (f^2 \sin^2 \alpha)/(0.696 \lambda^2)$ is the structural resolving power of the unobstructed system.

The validity of the above conclusion is not restricted to monochromats, it holds without much change for aberration-free systems working in polychromatic light such as sunlight. In figure 5 are compared the response functions of an aberration-free system without central obstruction and of one with central obstruction 0.25, both in monochromatic light and in sunlight [14]. On calculating from equation (3) the value of R_A corresponding to each of these four curves, it appears that a central obstruction of (linear) ratio 0.25 reduces the structural resolution of the system by

a factor 0.84 in sunlight, as compared with 0.82 in monochromatic light.

As already mentioned, the structural resolution of an optical system is rather closely related to its information-passing capacity; indeed the two become equivalent when the system is used on a random low-contrast object set. Furthermore, a slight decrease in image quality shows itself mainly through its effect on the reproduction of low-contrast fine detail. It follows that the conclusion drawn above, viz. that a decrease in R_A of about 20 per cent corresponds to a

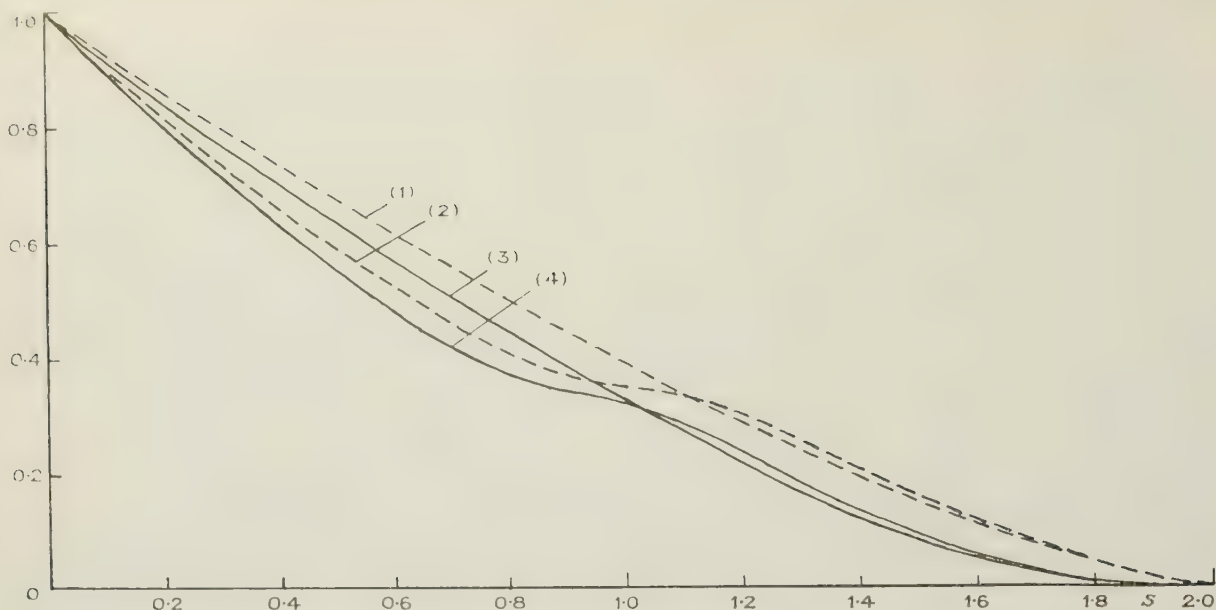


FIG. 5. — Response functions of an aberration-free system for "grey" object structure in monochromatic light and in sunlight, with and without a central obstruction of linear ratio 0.25; (1) monochromatic light, no central obstruction; (2) monochromatic light, central obstruction 0.25; (3) sunlight, no central obstruction; (4) sunlight, central obstruction 0.25. The parameter $s = \omega/\omega_0$ where $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$ and $2\omega^2$ is the spatial cut-off frequency at the peak wavelength $\lambda_0 = 5610\text{\AA}$ in the polychromatic case.

hardly perceptible deterioration in the image, may be expected on these general grounds to hold without much change for image-deterioration caused by small amounts of malfocussing, or of spherical aberration, or of aberrations of more general type, as well as for image-deterioration caused by central obstruction of an aberration-free aperture.

Manuscript reçu le 15 août 1956.

REFERENCES

- [1] *J. O. S. A.* **45**, 1955, 497-501.
- [2] For the analytical definition of this concept, see P. B. FELLGETT and E. H. LINFOOT, *Phil. Trans. Roy. Soc. (A)* **247**, 1955, 369.
- [3] See for example J. W. COLTMAN, *J. O. S. A.* **44**, 1954, 468.
- [4] The notation here and below is that of FELLGETT and LINFOOT, l. c. [2]. In that paper, (ξ, η) denote ordinary Cartesian coordinates, not scale-normalised ones as stated on p. 372.
- [5] By equation (3.73), l. c. [2], in which we set $F = A$, $\tau = \tau_A$, $\tau_1 = 1$, $s^2 = P$, $n^2 = N$.
- [6] By section 3.3, l. c. [2].
- [7] O. H. SCHADE, *J. Soc. Motion Picture and Television Engrs.* **58**, 1952, 182.
- [8] P. B. FELLGETT, *J. O. S. A.* **43**, 1953, 371.
- [9] H. H. HOPKINS, *Proc. Roy. Soc. (A)* **231**, 1955, 91. My thanks are due to Miss GILLIAN STORY for carrying out the computations needed for this figure. The relation between HOPKINS's frequency response function $D(s)$ and the response function $\tau_A(u, v)$ of the present paper is expressed by the equations

$$D(s) = \tau_A(u, v); \quad s^2 = \lambda^2(u^2 + v^2)/f^2 \sin^2 \alpha,$$
 where f is the focal length and $\sin \alpha$ the numerical aperture.
- [10] A. E. CONRADY, *Mon. Not. R. A. S.* **79**, 1919, 575.
- [11] τ is the FOURIER transform with respect to $x' - x$, $y' - y$ of the polychromatic spread-function

$$w(x', y'; x, y) = w_{x,y}(x' - x, y' - y).$$
 See E. H. LINFOOT, *J. O. S. A.* **46**, 1956, 740, Section 2.
- [12] A remark of THEODORE DUNHAM (*J. O. S. A.* **41**, 290), 1951, suggests that the value of the greatest "harmless" obstruction ratio may be near to 0.25 in some photographic applications also. He says: "Photomicrographs of biological sections show no obvious change in image quality with an obscuring ratio of 0.2, but there is a detectable reduction in local contrast when the obscuring ratio is 0.3".
- [13] Analytical expressions for the response function τ_η corresponding to a linear obstruction-ratio η have recently been given by E. L. O'NEILL (*J. O. S. A.* **46**, 1956, 285). One of the curves ($\tau_{0.75}$) shown in fig. 3 is taken from Dr O'NEILL's paper; two others ($\tau_{0.25}$, $\tau_{0.5}$) are identical with his. My thanks are due to Dr O'NEILL for making available the tabulated values on which his curves are based.
- [14] The effective visual brightness function of sunlight was taken as given by figure 4 of the paper on Telescopic Star Images, E. H. LINFOOT and E. WOLF, *Mon. Not. R. A. S.* **112**, 1952, 452.

Der Einfluss des Öffnungsfehlers auf die Bildgüte

JOACHIM FOCKE

Mathematisches Institut, Leipzig

ZUSAMMENFASSUNG. — Die Lichtverteilung im Bild von Kante, Streifen und Gitter wird unter Berücksichtigung des Öffnungsfehlers auf wellenoptischer Grundlage theoretisch berechnet und sein Einfluss auf die Bildgüte an Beispielen gezeigt.

SOMMAIRE. — La répartition de la lumière dans l'image de tests (bord, bandes ou grille) est calculée théoriquement en fonction de l'aberration sphérique, à partir de l'optique ondulatoire et son influence sur la qualité de l'image est montrée dans plusieurs exemples.

SUMMARY. — The distribution of light in the images of edges, strips and gratings in the presence of spherical aberration is calculated using wave theory, and its influence on image quality is illustrated by examples.

Zur Beurteilung der Abbildungsgüte photographischer Objektive gibt es auch heute noch kein verbindliches Kriterium. Die oft geforderte rein zahlenmässige Leistungsangabe etwa in Form des Auflösungsvermögens hat sich als irreführend erwiesen, denn abgesehen davon, dass sich dieses kaum absolut bestimmen lässt, spielt bei der photographischen Bildgüte nicht das Auflösungsvermögen sondern die Kontrastwiedergabe die ausschlaggebende Rolle. Man wird deshalb nach wie vor die Abbildung geeigneter Testobjekte wie Kante, Streifen, Kreisscheibe ⁽¹⁾ untersuchen müssen. Neuere Vorschläge gehen auch dahin, die Abbildung periodischer Objektstrukturen, vor allem Gitter mit sinusförmiger Helligkeitsverteilung, zu betrachten [1]. Da das Bild eines solchen Gitters stets wieder die gleiche sinusförmige Intensitätsverteilung aufweist, lässt sich die Abbildung durch nur einen Zahlenwert, die sog. Kontrastübertragung (contrast transmission), vollständig kennzeichnen, welche nur von der Linienfrequenz des Gitters abhängt. Man kommt somit obiger Forderung nach zahlenmässiger Leistungsangabe näher. Jedoch ist auch dieses Verfahren nicht frei von Fehlschlüssen, da es teilweise « falschen Kontrast » anzeigt, welcher nur auf der periodischen Struktur des Objektes beruht und nicht allgemein auf die Bildgüte schliessen lässt. (Siehe hierzu [1], Figure 9 und Figure 10 und auch unsere Abbildung 3).

In der vorliegenden Arbeit soll nun an Hand der genannten Tests rein theoretisch auf Grund wellenoptischer Rechnungen der Einfluss des Öffnungsfehlers auf die Bildgüte untersucht werden. Wir schliessen uns eng an die vor kurzem in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit des Verfassers [2] an, in welcher die Abbildung eines Objektpunktes bei vorhandenem Öffnungsfehler eingehend theoretisch untersucht worden ist.

Die Intensitätsverteilung in der Punktaustik kann somit als weitgehend bekannt angesehen werden.

Hieraus ergibt sich dann die Lichtverteilung im Bild eines inkohärent strahlenden Objekts durch entsprechende Überlagerung. Speziell für die leuchtende Halbebene (Kante), ihr geometrisches Bild in der Auffangebene $Z = \text{const.}$ sei $-\infty < X \leq 0$, $-\infty < Y < \infty$, erhalten wir :

$$(1) \quad \mathcal{J}_k(X_0, Z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{X \leq 0} \mathcal{J}(R, Z) dX dY, \\ R^2 = (X - X_0)^2 + Y^2$$

X, Y, Z sind dabei die Koordinaten des Bildraumes, $\mathcal{J}(R, Z)$ ist die Intensitätsverteilung im Beugungsbild eines Objektpunktes in der Auffangebene $Z = \text{const.}$, R der Abstand vom Zentrum, X_0 ist die X -Koordinate des Aufpunktes, d. h. sein Abstand von der Kante. Alle Grössen sind wie in [2] normiert, auch $1/4\pi$ ist ein Normierungsfaktor. An eine Integration von (1) auf analytischem Wege, wie sie im aberrationsfreien Fall von W. WEINSTEIN [3] erreicht worden ist, kann bei dem hier in Betracht zu ziehenden « grossen » Öffnungsfehler nicht gedacht werden. Es dürften nur numerische Verfahren in Frage kommen. E. WANDERSLEB [4] nimmt eine feine Unterteilung des Integrationsgebietes vor und berechnet (1) durch reine Summation zunächst über Y (Lichtlinie) und dann über X . Da er \mathcal{J} nur geometrisch-optisch in Ansatz bringt, \mathcal{J} also ausserhalb des geometrisch-optischen Zerstreuungskreises verschwindet, wird in (1) das Integrationsgebiet endlich. Es treten dann keine prinzipiellen Schwierigkeiten auf. Mit den gleichen Voraussetzungen arbeitet auch T. DI FRANCIA [5]. Die wellenoptische Struktur der Lichtverteilung berücksichtigt E. FINKE [6]. Er entnimmt \mathcal{J} experimentellen Messungen, approximiert stückweise durch Polynome unter Beschränkung auf die inneren vier Ringe, der äussere, experimentell auch schwer zu erfassende Lichtschleier wird vernachlässigt, und integriert dann (1) auf analytischem Wege. Wie [2], Abbildung 7 zeigt, enthält aber bei grossem Öffnungsfehler der äussere Lichtschleier noch einen beträchtlichen Energieanteil, so dass wir ihn hier voll berücksichtigen wollen.

⁽¹⁾ Siehe hierzu den Vorschlag von J. HARTMANN auf der 57. Tagung der Deutschen Gesellschaft für angewandte Optik, 1956.

Transformieren wir zunächst (1) auf Polarkoordinaten

$$(2) \quad \mathcal{J}_k(X_q, Z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \mathcal{J}(R, Z) R dR d\varphi \mp \int_0^{\pi/2} \int_0^{|X_q/\cos\varphi|} \mathcal{J}(R, Z) R dR d\varphi \right], \mp \text{ für } X_q \gtrless 0$$

und führen damit die Berechnung von \mathcal{J}_k auf die Totalbeleuchtung

$$(3) \quad B(R, Z) = \frac{1}{2} \int_0^R \mathcal{J}(R', Z) R' dR'$$

zurück, was für unsere Methode charakteristisch ist. B gibt die Totalbeleuchtung in einem Kreis mit Radius R in der Auffangebene $Z = \text{const.}$ an und ist entsprechend der Energiebilanz normiert auf

$$(4) \quad B_\infty = B(\infty, Z) = H_R^2 = 1,$$

$H_R = 1$: normierte Einfallshöhe des Randstrahls. Damit geht (2) über in

$$(5) \quad \mathcal{J}_k(X_q, Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[1 \mp B\left(\frac{|X_q|}{\cos\varphi}, Z\right) \right] d\varphi, \mp \text{ für } X_q \gtrless 0$$

mit

$$\mathcal{J}_k(0, Z) = \frac{1}{2}, \mathcal{J}_k(\infty, Z) = 0, \mathcal{J}_k(-\infty, Z) = 1$$

Nun zur Berechnung von $B(R, Z)$. In [2] wurden für die Intensitätsverteilung \mathcal{J} sowohl für achsennahe wie achsenferne Aufpunkte Formelsätze hergeleitet und eine Anzahl Beispiele numerisch durchgerechnet. Wir wollen zunächst als Ergänzung hierzu nach N. G. VAN KAMPEN [7] noch einen Näherungsausdruck aufstellen, welcher die Intensität in der lichtseitigen Umgebung der Schattengrenze (Randstrahl) gut wiedergibt (Randstrahl selbst ausserhalb der Brennfleichen).

$$(6) \quad \mathcal{J}(R, Z) \sim \frac{2\tilde{r}^2}{|\tilde{\varphi}_{\alpha\alpha} \tilde{\varphi}_{rr}|} \left[\left(\frac{1}{2} - C(t) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S(t) \right)^2 \right], \quad t = -\sqrt{\frac{\hat{\varphi}_r^2}{\pi |\hat{\varphi}_{rr}|}}$$

Alle Bezeichnungen wie in [2], Abschnitt 5. $C(t)$ und $S(t)$ sind die FRESNELschen Integrale. Damit ist $\mathcal{J}(R, Z)$ in den wichtigsten Querschnitten $Z = \text{const.}$ bis zur geometrischen Schattengrenze vollständig bekannt und wir können $B(R, Z)$ entsprechend (3) leicht durch numerische Integration (SIMPSONSche Regel) berechnen. Im geometrischen Schatten können wir durch rückläufige Integration von $R = \infty$ aus für $B_\infty - B(R, Z)$ genau in der gleichen Weise, wie es vom Verfasser schon im aberrationsfreien Falle durch-

geführt worden ist [8], direkte asymptotische Näherungsausdrücke aufstellen.

$$(7) \quad 1 - B(R, Z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\hat{\varphi}_{rr}}} H(t), \quad t = +\sqrt{\frac{\hat{\varphi}_r^2}{\pi |\hat{\varphi}_{rr}|}},$$

für R in der äusseren Umgebung der Schattengrenze (diese selbst ausserhalb der Brennfleichen), Hilfsfunktion $H(t)$ entsprechend [8], Formel (11) und Tabelle 1.

$$(8) \quad 1 - B(R, Z) \sim \frac{2}{\pi} \frac{R}{R^2 - \hat{R}^2}$$

für R im Schattengebiet. $R = \hat{R}$ ist der Abstand des Randstrahldurchstosspunktes von der Achse. Im Falle sphärischer Randkorrektur ist $\hat{R} = 2Z$, sonst folgt \hat{R} unmittelbar aus [2], Formel (5, 2).

Wir kommen somit bei der Berechnung von B von zwei Seiten an die Schattengrenze heran, und der Vergleich der beiden erhaltenen Werte gibt eine gute Kontrolle aller vorangegangenen Rechnungen. In den von uns durchgerechneten Beispielen blieb die Differenz unter $0,01 B_\infty$. Im Gegensatz zu der stark oszillierenden Intensitätsverteilung haben wir für die Totalbeleuchtung eine wesentlich « glattere » Verteilung erhalten. Diese gestattet nun leicht die Integration (5) wiederum numerisch auszuführen. Die SIMPSONSche Regel liefert schon bei einer Unterteilung des Integrationsintervalles $(0, \frac{\pi}{2})$ in 3×2 Teilintervalle ausreichende Genauigkeit. Für grosse X_q kann man durch Einsetzen von (8) das Integral (5) auch geschlossen ausführen und erhält asymptotisch

$$(9) \quad \mathcal{J}_k(X_q, Z) \sim \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{X_q} \frac{X_q^2}{X_q^2 - \hat{R}^2} \sqrt{\frac{X_q^2 - \hat{R}^2}{\hat{R}^2}} \times \arctg \sqrt{\frac{\hat{R}^2}{X_q^2 - \hat{R}^2}} \\ \sim \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{X_q} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{\hat{R}^2}{X_q^2} + \frac{8}{15} \frac{\hat{R}^4}{X_q^4} + \dots \right].$$

Im Falle der aberrationsfreien Abbildung geht (9) in die schon von WEINSTEIN angegebene Entwicklung [3] Formel (19) über.

Ist die Lichtverteilung $\mathcal{J}_k(X_q, Z)$ im Bild einer Halbebene bekannt, so kann man durch weitere Superposition die Abbildung anderer inkohärenter Objektstrukturen untersuchen. Wir betrachten zunächst einen einzelnen hellen Streifen auf schwarzen Hintergrund. Sein geometrisches Bild sei $-\delta \leq X \leq \delta$, $-\infty < Y < \infty$ mit der Intensität 1, dann erhalten wir für die Intensitätsverteilung in seinem Beugungsbild

$$(10) \quad \mathcal{J}_{\text{Str}}(X_q) = 1 - \mathcal{J}_k(X_q + \delta) - \mathcal{J}_k(\delta - X_q) = \mathcal{J}_k(X_q - \delta) - \mathcal{J}_k(X_q + \delta),$$

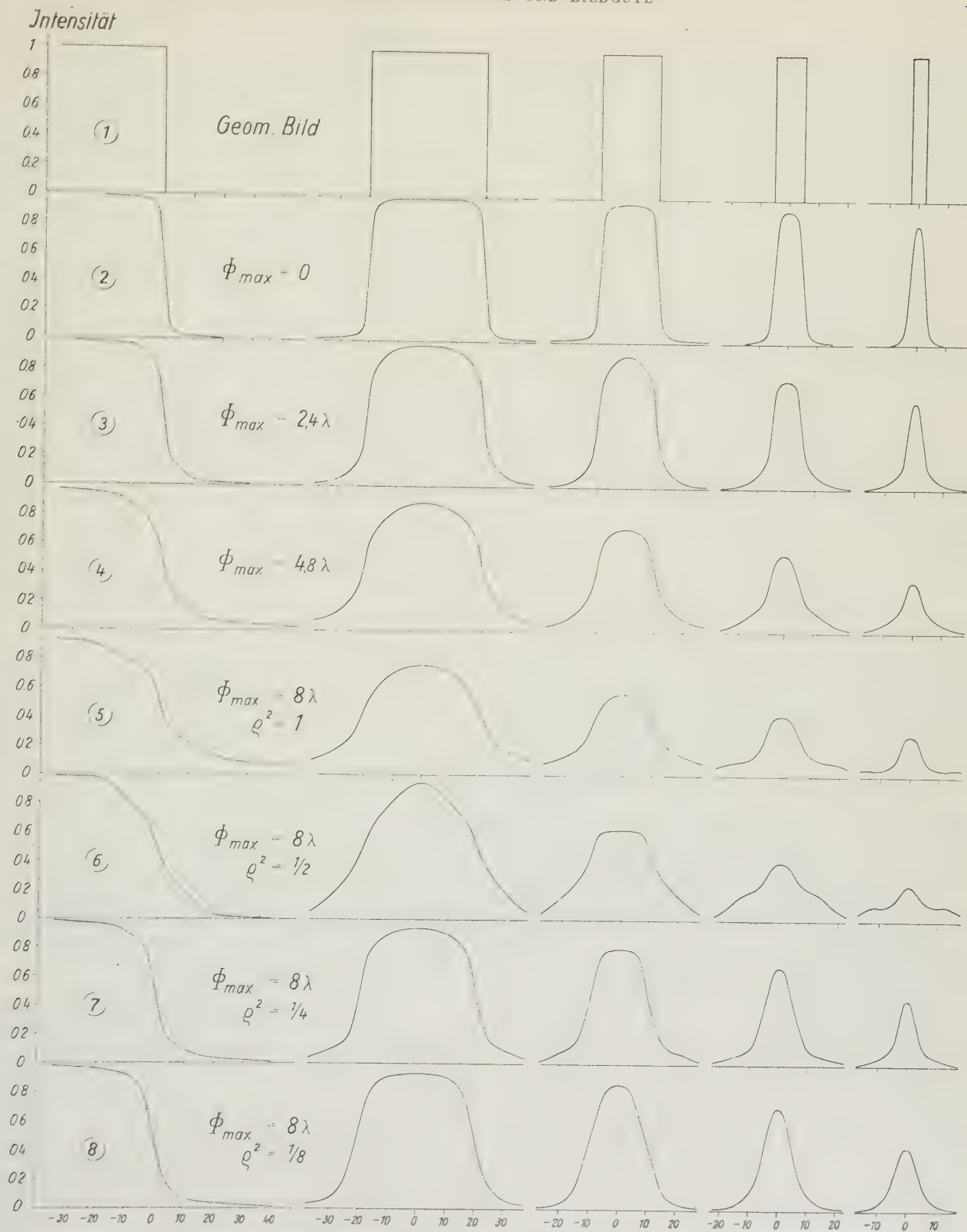


ABB. 1. — Die Lichtverteilung im Bild einer Kante und einzelner Streifen verschiedener Breite unter dem Einfluss des Öffnungsfehlers. (1): Das geometrische Bild der Testobjekte in der Bildebene. (2)-(5): sukzessive anwachsender Öffnungsfehler bis zur Wellenaberration $\Phi_{max} = 8\lambda$, randstrahlkorrigiert (6)-(8): Öffnungsfehler $\Phi_{max} = 8\lambda$, jeweils um einen Blendenwert abgeblendet, ρ : relativer Blendenradius, Objektintensität mit ρ^2 ansteigend, so dass in allen Fällen das gleiche geometrische Bild (1). Die Aufzählung liegt in allen Fällen im jeweiligen Hauptmaximum der Punktkautistik, [2], Abb. 1 und Abb. 6. Abszissen in normierten Bildebeneinheiten, 1 entspricht $\lambda/2\pi h_R$ mit $2h_R/f$: Öffnungsverhältnis (bei voller Öffnung), λ : Wellenlänge des Lichts.

X_q ist wieder die X -Koordinate des Aufpunktes von der Mitte des Streifens aus gerechnet, die Abhängigkeit von Z ist im Argument unterdrückt. Durch unendliche Überlagerung können wir weiterhin zur Abbildung eines Streifengitters übergehen, Streifenbreite wie oben 2δ , Streifenabstand 2δ , Periodenlänge $l = 4\delta$,

$$(11) \quad \mathcal{J}_c(X_q) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_{\text{str}}(X_q + 4v\delta).$$

Die Aufpunktcoordinate zählt wieder von der Mitte des nullten Streifens aus. Für den wie üblich durch $\frac{\mathcal{J}_{\text{max}} - \mathcal{J}_{\text{min}}}{\mathcal{J}_{\text{max}} + \mathcal{J}_{\text{min}}}$ erklärten Gitterkontrast folgt dann

$$(12) \quad C_g = C_c(N) = 1 - 4\epsilon \mathcal{J}_k(\delta) + 4\epsilon \mathcal{J}_k(3\delta) - 4\epsilon \mathcal{J}_k(5\delta) + \dots$$

abhängig von δ bzw. von der Linienfrequenz $N = 1/4\delta$ des Gitters. Für grosse δ kann man entsprechend (9) näherungsweise $\mathcal{J}_k(v\delta) \sim \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{v\delta}$ einsetzen und summieren.

$$(13) \quad C_g \sim 1 - \frac{2}{\pi\delta} = 1 - \frac{8}{\pi} N$$

Schliesslich können wir hieraus nach J. W. COLTMAN [9] auch zur eigentlichen Kontrastübertragung übergehen, worunter wir nach P. LINDBERG [1] den Bildkontrast eines Gitters mit sinusförmiger Helligkeitsverteilung und Kontrast 1 verstehen wollen.

$$(14) \quad C = \frac{\pi}{4} \left[C_c(N) + \frac{1}{3} C_c(3N) - \frac{1}{5} C_c(5N) + \frac{1}{7} C_c(7N) + \frac{1}{11} C_c(11N) - \dots \right].$$

Wie schon oben gesagt charakterisiert die Kontrastübertragung die Abbildung eines solchen Gitters vollständig. Ausserdem gestattet sie durch Fourierentwicklung zu anderen periodischen und durch Fouriertransformation zu nichtperiodischen linearen Objektstrukturen überzugehen.

Zum Abschluss der Arbeit wollen wir einige praktische Resultate mitteilen. Abbildung 1 zeigt die wellenoptisch berechnete Lichtverteilung im Bild einer Kante und einzelner Streifen verschiedener Breite unter dem Einfluss des Öffnungsfehlers. Dieser bewirkt mit anwachsender sphärischer Zone bzw. Wellenaberration einmal eine Abflachung des Lichtabfalls an der Kante selbst zum anderen eine bedeutende Zunahme des Licht- bzw. Schattensaumes zu beiden Seiten. Dabei ist der letztere Effekt stark dominierend, es genügt deshalb keinesfalls, die Lichtverteilung allein durch den Intensitätsgradienten an der Kante selbst zu charakterisieren. Dieser lässt sich unmittelbar aus (1) durch Substitution $X' = X - X_q$

und Differentiation nach der neuen oberen Grenze $-X_q$ berechnen.

$$(15) \quad \frac{d}{dX_q} \mathcal{J}_k(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{J}(R) dR.$$

Die entstehende Kontrastminderung wird durch die Betrachtung der Streifenabbildung noch deutlicher. Während bei den breiten Streifen mit wachsendem Öffnungsfehler zunächst eine Verwaschung der Streifenkanten eintritt, nimmt nach kleinen Streifenbreiten zu auch die Kontrastwiedergabe beträchtlich ab. Die letzten drei Abbildungszeilen zeigen die Wirkung der Abblendung. Diese drückt zunächst den Licht- bzw. Schattensaum wesentlich herab, auch der Lichtabfall an der Kante selbst wird etwas steiler, bis der Einfluss des Öffnungsfehlers ganz verschwunden ist, sich dann aber der Beugungseffekt bildverschlechternd bemerkbar macht. Die günstigste Blendenwirkung ist wohl zwischen $\rho^2 = 1/4$ und $1/8$ zu suchen. Abbildung 2 stellt die Kantenabbildung in verschiedenen Aufgabenebenen dar. Den steilsten Lichtabfall

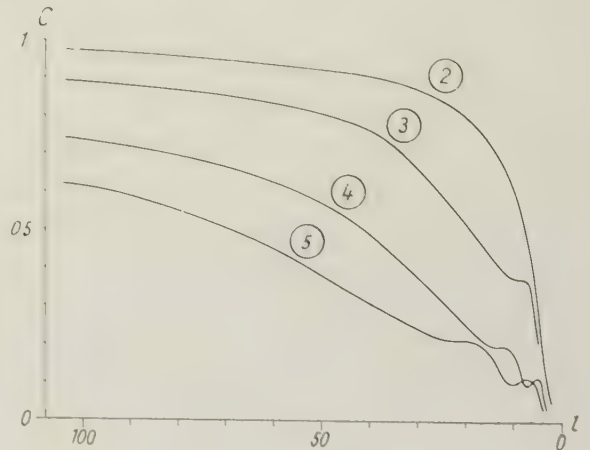


ABB. 2. — Die Lichtverteilung im Bild einer Kante bei randkorrigiertem Öffnungsfehler $\Phi_{\text{max}} = 8\lambda$ in den Aufgabenebenen $Z = 0,75\Delta$ bis 1Δ . $Z = \Delta$: Zonenstrahlenschnittpunkt, Δ : Grösse der sphärischen Zone, Z -Achse in Lichtrichtung, Abszissen wie Abb. 1.

finden wir in Übereinstimmung mit dem Hauptmaximum der Punktabbildung bei $Z = 0,9\Delta$. Dagegen zeigt sich bei $Z = 0,8\Delta$ ein Rückgang des äusseren Lichtsaumes. Da beide Effekte die Bildgüte beeinflussen, muss die günstigste Einstellebene wohl zwischen beiden Z -Werten liegen.

Schliesslich zeigt noch Abbildung 3 den Einfluss des Öffnungsfehlers an Hand der Kontrastübertragung. Fordert man z. B. eine Kontrastwiedergabe $C = 0,5$, so sinkt das Auflösungsvermögen mit wachsendem Öffnungsfehler von $l = 8$ im aberrationsfreien Falle auf $l = 70$ bei $\Phi_{\text{max}} = 8\lambda$. Die Kontrastübertragung verbindet die beiden für die Bildgüte ausschlaggebenden Komponenten Kontrast und Auflösungsvermögen zu einer sehr instruktiven zahlenmässigen

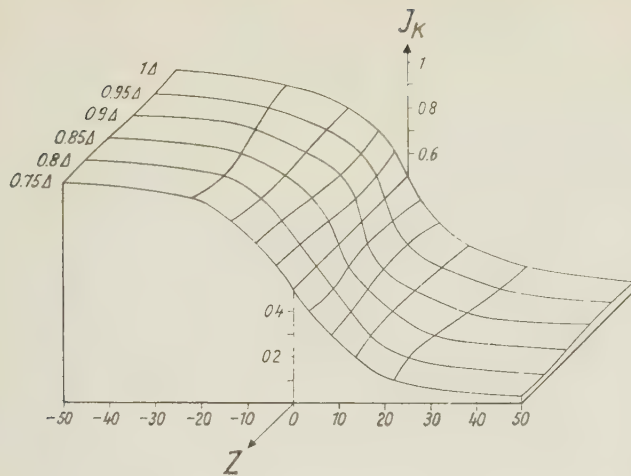


Abb. 3. — Die Kontrastübertragung C in Abhängigkeit vom Öffnungsfehler. Entspricht den Fällen (2)-(5) von Abb. 1. l : Periodenlänge des Gitters in normierten Bildebeneinheiten wie in Abb. 1.

gen Leistungsangabe. Nach den kleinen Gitterperioden zu treten allerdings Fehlangaben, sog. falscher Kontrast auf (in Form von Kontrastminima und -maxima), welcher nur durch die Gitterstruktur des Testobjektes hervorgerufen wird und keine allgemeine Aussage über die Bildgüte darstellt. Dieser Effekt zeigt sich auch an den von P. LINDBERG experimentell gemessenen Kontrastkurven [1] Figure 12, welche im übrigen mit unseren theoretisch berechneten prinzipiell gut übereinstimmen.

LITERATURHINWEISE

- [1] P. LINDBERG, *Opt. Acta*, **1**, 1954, p. 80-89.
- [2] J. FOCKE, *Opt. Acta*, **3**, 1956, p. 110-126.
- [3] W. WEINSTEIN, *J. O. S. A.*, **44**, 1954, p. 610-615.
- [4] E. WANDERSLEB, Die Lichtverteilung in der axialen Kautistik eines mit sphärischer Aberration behafteten Objektivs, Berlin 1952.
- [5] T. DI FRANCIA, *J. O. S. A.*, **43**, 1953, p. 827-835.
- [6] E. FINKE, Jenaer Jahrbuch 1954, II. Teil, p. 385-400.
- [7] N. G. VAN KAMPEN, *Physica*, **14**, 1948, p. 575-589.
- [8] J. FOCKE, *Opt. Acta*, **3**, 1956, p. 161-163.
- [9] J. W. COLTMANN, *J. O. S. A.*, **44**, 1954, p. 468-471.

Ein Verfahren zur Messung der Kontrast-Übertragungsfunktion photographischer Objektive.

K. ROSENHAUER und K.-J. ROSENBRUCH, Braunschweig
Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt

SUMMARY. — The contrast K of a self-luminous or incoherently illuminated object is defined by $K = (J_{\max} - J_{\min}) / (J_{\max} + J_{\min})$ where J is the intensity of illumination. When an optical system forms an image of the object, the contrast is reduced, due to diffraction, aberrations, and veiling-glare. The reduction of contrast is a function of the size of the object (or the spacial frequency), the relative aperture of the imaging system and its state of correction.

An apparatus is described for measuring this contrast transmission function for miniature camera lenses. The objective to be tested projects on to a narrow slit the image of a rotating grating having varying frequencies, and $K = 1$. A photomultiplier gives an output proportional to the intensity of transmitted light and a cathode ray oscillograph synchronised with the rotation of the grating gives a stationary representation of the light distribution in the image.

Results obtained with this apparatus from miniature camera lenses are given and discussed for radial and tangential lines at various relative apertures and field angles and at different axial planes of focus.

SOMMAIRE. — Le contraste K d'un objet éclairé de façon incohérente ou lumineux par lui-même est défini, si, J désigne l'intensité par $K = (J_{\max} - J_{\min}) / (J_{\max} + J_{\min})$. Lorsqu'un système optique forme une image de cet objet, le contraste subit une diminution due à la diffraction par l'ouverture, aux aberrations de l'optique et à la lumière parasite diffusée. Cette baisse de contraste est une fonction de la grandeur de l'objet (ou de la fréquence spatiale) et dépend de l'ouverture relative et de l'état de correction du système optique.

Un dispositif est élaboré pour la mesure de cette fonction de transmission du contraste dans le cas des objectifs photographiques de petit format. Avec l'objectif à essayer, on projette sur une fente étroite l'image d'un réseau tournant, de pas décroissant et de contraste $K = 1$. Un photomultiplicateur convertit la lumière transmise en tensions proportionnelles aux intensités, et sur un oscillographe cathodique synchronisé avec la rotation du test on obtient une image fixe de la répartition des intensités dans l'image du test.

On présente et on discute les courbes de transmission de contraste obtenues avec ce dispositif pour des objectifs photo de petit format, dans le cas de réseaux à traits horizontaux et verticaux pour diverses valeurs de l'angle et du diaphragme, ainsi que dans le cas d'un défaut de mise au point dans l'axe.

ZUSAMMENFASSUNG. — Der Kontrast K eines inkohärent beleuchteten oder selbstleuchtenden Objektes, definiert nach der Gleichung $K = (J_{\max} - J_{\min}) / (J_{\max} + J_{\min})$ (J = Intensität), wird bei der Abbildung durch optische Systeme durch Beugung an der Öffnung, durch die Abbildungsfehler der Optik und durch nicht bilderzeugendes Streulicht verringert. Diese Abnahme des Kontrastes ist eine Funktion von der Größe der abgebildeten Objekte (Raumfrequenz) und hängt von dem Öffnungsverhältnis und dem Korrektionszustand des abbildenden Systems ab.

Für die Messung dieser Kontrast-Übertragungsfunktion wurde für Kleinbildobjektive eine Apparatur entwickelt. Ein rotierendes Gitter mit abnehmender Gitterkonstante und einem Kontrast $K = 1$ wird durch das zu prüfende Objektiv auf einen engen Spalt abgebildet. Das durchgelassene Licht wird von einem Photo-Multiplier in intensitätsproportionale Spannungen verwandelt, die auf einem mit dem rotierenden Test synchronisierten Kathodenstrahl-Oszillographen eine stehendes Bild der Intensitätsverteilung des Testbildes erzeugen. Es werden die mit dieser Apparatur für Kleinbildobjektive erhaltenen Kontrastübertragungskurven für horizontale und vertikale Gitterlinien bei verschiedenen Bildwinkeln und Abblendungen, sowie für Defokussierung in der Achse gezeigt und diskutiert.

Bei der Prüfung photographischer Objektive unterscheidet man grundsätzlich zwei Methoden.

Erstens die differenzierenden Methoden, bei denen die einzelnen Bildfehler der Objektive bestimmt werden und zweitens die integrierenden Methoden, bei

denen das Zusammenwirken der Einzelfehler auf die Gesamtqualität des Bildes ermittelt wird. Das Verfahren, das hierbei hauptsächlich angewandt wird, ist das Verfahren der Beurteilung der Bildqualität einer Testtafel durch visuelle Beobachtung des Luft-

oder Mattscheibenbildes oder durch Beurteilung einer photographischen Probeaufnahme. Die Testtafel ist aus geeigneten Testen verschiedener Grösse und verschiedenen Kontrastes aufgebaut. Als Kriterium für eine gute Bildqualität sieht man meistens das Auflösungsvermögen an. Unter Auflösungsvermögen wird dabei der Abstand zweier Punkte verstanden, die gerade noch getrennt wahrnehmbar sind. Bei einem gitterartigen Test wird analog dazu die Gitterkonstante oder auch ihr reziproker Wert als Auflösungsvermögen bezeichnet. Es ist schon lange aufgefallen, dass bei manchen Objektiven, obgleich ein hohes Auflösungsvermögen erzielt wurde, das Gesamtbild doch merkwürdig kontrastarm oder — wie gesagt wird — das Gesamtbild wattig oder weich erscheint.

Es drängt sich so die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Auflösungsvermögen und Kontrast auf. Setzt man voraus, dass als Objekt z. B. ein Gitter aus vollkommen undurchsichtigen Strichen und vollkommen durchsichtigen Zwischenräumen verwandt wird, so ist der Kontrast gleich 100 %, wenn man folgende Kontrastdefinition verwendet :

$$100 \times \frac{J_{\text{Max}} - J_{\text{Min}}}{J_{\text{Max}} + J_{\text{Min}}} = K \%$$

Man wird dann bei abnehmender Gitterkonstante Auflösung bis zu dem Punkt erzielen, wo man die Kontrastschwelle des Auges für den vorliegenden Beobachtungsfall erreicht. Die Kontrastschwelle des Auges ist aber von vielen Nebenumständen, wie Vergrößerung, Beleuchtungsstärke, Güte der Trennkante, Farbe und Blendung abhängig. Man wird also nicht erwarten können, dass Auflösungsvermögen photographischer Objektive, die von verschiedenen Beobachtern nach verschiedenen Verfahren ermittelt wurden, übereinstimmen. Es sei denn, man gibt die bei der Messung wirksamen Randbedingungen genauestens an.

In der elektrischen Nachrichtentechnik ist die Übertragungstheorie eines Vierpols weitgehend ausgebildet worden und man kann für den Fall der optischen Übertragung eines Gitters mit abnehmender Gitterkonstanten ähnliche Betrachtungen wie im elektrischen Fall anschliessen [1]. Auch in der Optik werden von einem Sender (Objekt) Frequenzen (in der Optik verschiedene Gitterkonstanten auch als Raumfrequenzen bezeichnet) mit verschiedenen Amplituden und Phasen ausgestrahlt, die durch ein Linsensystem (Übertrager) nach Phase und Amplitude verändert werden und am Empfangsort (Bildebene) durch Überlagerung das Abbild des Senders erzeugen. Es interessiert nun, mit welchen Amplituden und manchmal auch Phasen die verschiedenen Raumfrequenzen übertragen werden. Ein Mass dafür ist das Verhältnis des Kontrastes im Bild zu dem im Objekt bei verschiedenen Raumfrequenzen. In der Nachrichtentechnik würde man vielleicht vom Modulationsgrad sprechen. Hier wird dieser Zusammenhang als

Übertragungsfunktion bezeichnet. Diese Übertragungstheorie ist unter anderem von LINFOOT [2], H. H. HOPKINS [3] und Mitarbeitern [4] ausgearbeitet worden.

Grundsätzlich kann man für die Übermittlung der Übertragungsfunktion zwei Wege beschreiten. Erstens kann man auf der Eingangsseite Frequenzen konstanter Amplitude eingeben und kann auf der Ausgangsseite den Zusammenhang zwischen Amplitude und Frequenz ermitteln. Zweitens ist es möglich, die Eingangsamplitude bei verschiedenen Frequenzen so zu regeln, dass die Ausgangsamplitude einen konstanten Wert annimmt. Mit beiden Methoden kann man die Übertragungsfunktion nach Amplitude und Phase in Abhängigkeit von der Frequenz ermitteln. Diese Verhältnisse sind der Nachrichtentechnik weitgehend bekannt. Das in der Optik übliche Verfahren zur Bestimmung des Auflösungsvermögens arbeitet mit einer konstanten Ausgangsamplitude, nämlich der Kontrastempfindlichkeit des Auges in den besonderen Beobachtungsfällen. Man kann also für Variationen des Eingangskontrastes bei Beobachtung verschieden weiter Gitter so die Übertragungsfunktion, oder in der Optik richtiger Kontrast-Übertragungsfunktion genannt, ermitteln. Da aber das Auge als physiologisches Messinstrument starken Schwankungen sowohl von Beobachter zu Beobachter wie auch zeitlichen Schwankungen usw. unterliegt, so ist es klar, dass solche Messungen mit relativ grossen Fehlern behaftet sind.

Man hat deshalb nach verbesserten Verfahren gesucht, und es wird in diesem Zusammenhang auf die Arbeiten von INGELSTAM u. LINDBERG [5], SCHADE [6] [7] [8], SELVYN u. TEARLE [9], LINDBERG [10] und H. H. HOPKINS [11] hingewiesen. An ein für die Praxis verwendbares Verfahren wird aber die Bedingung geknüpft, dass es neben ausreichender Genauigkeit auch genügend schnell durchführbar ist und dass die Apparatur mechanisch nicht zu schwierig herzustellen bzw. nicht zu kostspielig ist. Ausserdem müssen die Ergebnisse schnell greifbar sein.

Es wurde deshalb folgender Weg beschritten, der in Abb. 1 schematisch dargestellt ist. In der Objektebene eines Photoobjektivs, die ca 5 m von dem zu prüfenden optischen System entfernt war, befand sich ein Gitter, dessen Linien scharfe Kanten zeigten und dessen Kontrast gleich 100 % bzw. 1 war. Würde man nun in der Bildebene die Lichtverteilung z. B. mit Gleichlicht ermitteln, so könnte man das Verhältnis zwischen dem Kontrast des Objektgitters und dem Kontrast seines Bildes ermitteln. Da dieses Gitter eine in geometrischer Reihe abnehmende Gitterkonstante besitzt, so würde man daraus also den Zusammenhang zwischen Kontrastübertragung und Auflösungsvermögen ermitteln können. Eine solche Anordnung hat aber den Nachteil, dass während der gesamten Messzeit sich die Helligkeit der Beleuchtungslampe nicht ändern und dass auch die Empfindlichkeit des zur Registrierung benutzten Empfängers keinen Schwan-

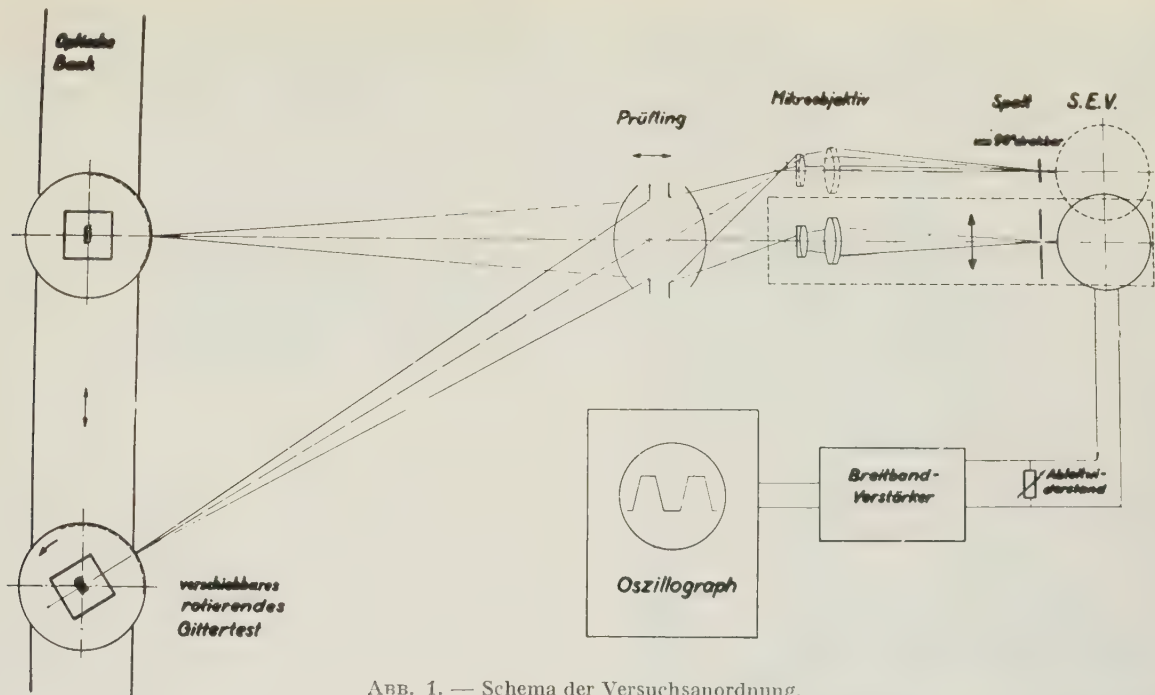


ABB. 1. — Schema der Versuchsanordnung.

kungen unterliegen darf. Als weitere Schwierigkeit kommt hinzu, dass man die Abtastung des in der Bildebene entstandenen Luftbildes mit einem sehr engen Spalt vornehmen muss. Das Auflösungsvermögen von handelsüblichen photographischen Kleinbildobjektiven von ca 50 mm Brennweite kann aber bis zu Werten von etwa 4μ gehen. Man müsste also als Abtastspalt einen solchen von wenigstens $0,8$ bis 1μ verwenden und diesen Spalt mit der entsprechenden Genauigkeit an dem in der Bildebene befindlichen Gitterbild entlang führen. Es würden also sehr hohe Anforderungen an die Güte einer solchen Führung und an die Stabilität der gesamten Anordnung gestellt werden. Benutzt wurde deshalb ein Spalt von üblichen Grössenabmessungen, in diesem Fall von etwa $3/100$ mm, der durch ein gutes, ausgesuchtes Mikroobjektiv etwa 40 fach verkleinert in der Bildebene abgebildet wird. Dieses Mikroobjektiv (num. Apertur 0,7) bildet infolge seines grossen Öffnungswinkels auch die unter grossen Bildwinkeln einfallenden Bündel auf dem Spalt ohne Drehung des Mikroskops ab, wenn das Test auf einer die Gegenstandsebene darstellenden optischen Bank seitlich verschoben wird. Natürlich ist dann eine seitliche Verschiebung des Mikroskops mit Spalt und Multiplier nötig. Abb. 2 gibt eine Ansicht dieser Einrichtung, auf der das zu prüfende Photoobjektiv, das Mikroobjektiv, der Photomultiplier, die seitliche wie auch die axialen Verschiebungsmöglichkeiten zu sehen sind. Die vorn sichtbare Messuhr dient zur Bestimmung der axialen Verschiebung. Anstelle einer Bewegung des Spaltes wird eine Bewegung in der Objektebene vorgezogen. Es wird also das Gitter in der Objektebene bewegt und man erhält auf dem hinter dem Spalt befindlichen Photomultiplier einen Strom,

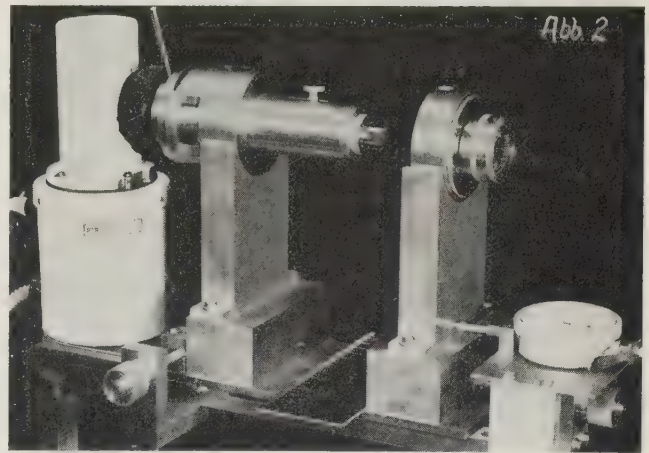


ABB. 2. — Prüfeinrichtung.

der der Lichtverteilung im Bild entspricht. Das verwandte Mikroobjektiv ist in seiner Qualität — wie sich gezeigt hat — wesentlich besser als die zu untersuchenden photographischen Objektive. Im allgemeinen kann man sagen, dass die geometrisch optischen Bildfehler guter Mikroobjektive etwa 10 mal so klein als die der hier zu untersuchenden photographischen Objektive sind. Sein Einfluss wird daher vernachlässigt. Genauere Untersuchungen laufen noch. Um nun von den Schwankungen der Lichtquelle und von der Instabilität möglichst unabhängig zu sein, wurde das Test auf einer schnell umlaufenden Trommel (ca 20 sec^{-1}) (Abb. 3) angebracht. Man erhält dann auf einem hinter dem Photomultiplier befindlichen Oszillographen unter Zwischenschalten geeigneter Ver-

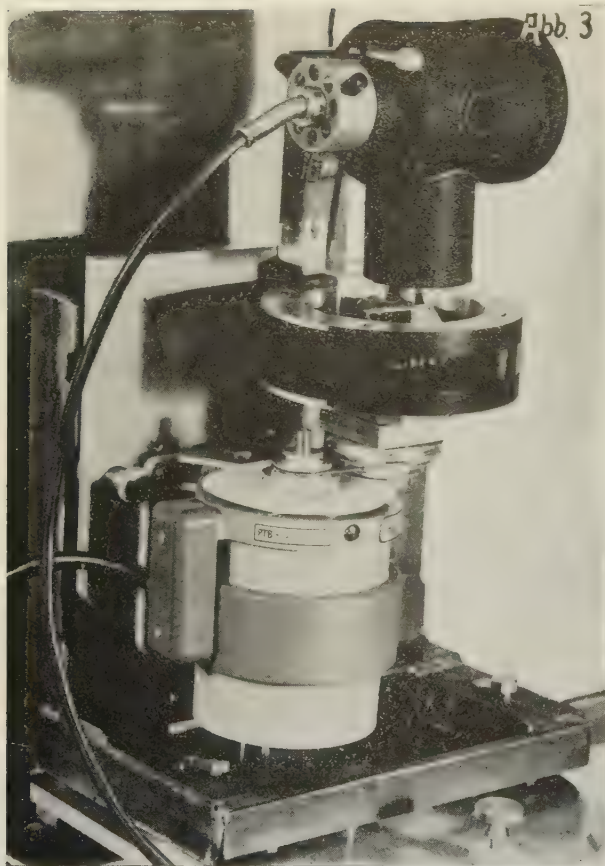


ABB. 3. — Testtrommel mit Beleuchtung auf Schiene verschiebbar, drehbar und um 90° schwenkbar.

stärker ein stehendes Bild, wenn man die Zeitablenkung des Oszillographen mit dem Trommelumlauf synchronisiert. Man sieht also auf dem Oszillographenschirm die Lichtverteilung in der Bildebene des photographischen Objektivs (Abb. 4a und 4b). Die rotierende Trommel ist um die Bildmitte um 90° drehbar, so dass sowohl horizontale als auch vertikale Gitterlinien abgebildet werden können. Verstärker und Oszillo-

graph müssen so gewählt werden, dass sie die für die Übertragung notwendigen Frequenzen einwandfrei wiedergeben, was mit Rechteckimpulsen geeigneter Frequenz geprüft worden war. Die Beleuchtung des Testes erfolgte im durchgehenden Licht mit ausreichender Apertur und zwischengeschalteter Streuscheibe, um die Inkohärenz des Lichtes zu gewährleisten und um nicht scharfe Interferenzstrahlen, die bei Gittertesten eine fehlerhafte Messung des Auflösungsvermögens hervorrufen, zu erhalten.

Die vorliegenden theoretischen Untersuchungen [3] [4] beziehen sich fast alle auf Teste mit einer Intensitätsverteilung, die sinusförmig und unendlich lang ist. Praktisch lassen sich solche sinusförmigen Verteilungen aber nur schwierig herstellen, man zieht deshalb Gitter vor, die rechteckige Lichtimpulse erzeugen. In diesem Fall muss man ein Gitter mit verschiedenen Gitterkonstanten benutzen. Hier wurden rechteckige Lichtimpulse benutzt, die durch einen Test erzeugt wurden, dessen Gitterkonstanten in einer geometrischen Reihe abnahmen. Jeweils ein schwarzer und ein weißer Strich hatten dabei gleiche Breite. Im Prinzip könnte man natürlich auch als Testobjekt Gruppen gleicher Gitterkonstante verwenden, die hintereinander angeordnet sind. Grundsätzlich ist auch die Verwendung einer einzelnen Kante möglich, denn eine solche scharfe Kante stellt ein Fourierspektrum dar, in dem alle Frequenzen vorkommen. Allerdings sind die höheren Frequenzen dabei nur mit kleinen Amplituden vertreten und deshalb ist eine solche Kante als Objekt schlecht geeignet. Da das Fourierspektrum für die hier verwendeten Teste zur Zeit noch untersucht wird und der Oberwellengehalt der einzelnen Gitterstriche nicht genau bekannt ist, so wird auf eine Bewertung der Kantensteilheit bei der hier benutzten Methode nur geringer Wert gelegt. Es muss noch bemerkt werden, dass beim Vergleich mit den von H. H. HOPKINS [3] errechneten theoretischen Kurven zu beachten ist, dass bei den hier durchgeführten Messungen weisses Licht benutzt wurde. Die als Lichtquelle benutzte Glühlampe hatte eine Farbtemperatur, die zwischen $2\,000^\circ\text{K}$ und ca $3\,000^\circ\text{K}$ gehalten wurde. In Verbin-

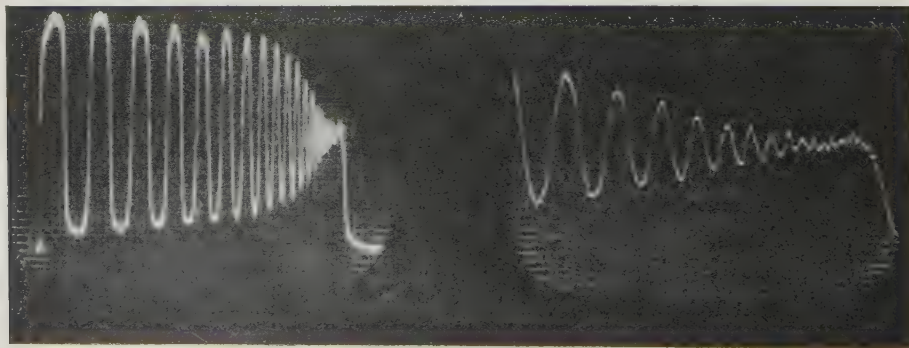
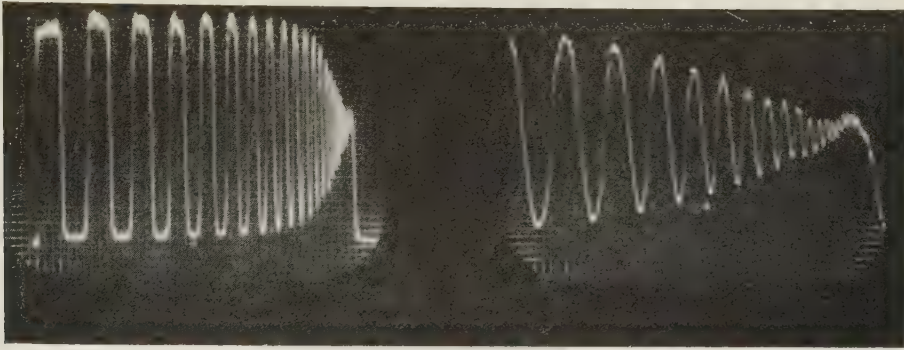


ABB. 4. — Bild auf der Kathodenstrahlröhre der vom Objektiv übertragenen Intensitätsamplituden des Testes.

a) gut korrigiertes Objektiv Blende 2,8,



b) einfacheres Objektiv Blende 2,8.

Linke Seite : Bild des gesamten Testes ; Rechte Seite : Bild des Testes vom 10. Gitterstrich ab. (Zeitachse ist elektrisch gedehnt).

dung mit der spektralen Empfindlichkeitskurve des benutzten Photomultipliers ergab sich so eine spektrale Empfindlichkeit, die etwa der entsprach, die man für panchromatisches Photomaterial in Kombination mit einem schwachen Gelbfilter für normales Tageslicht erhält. Beim Vergleich der theoretischen Kurven mit den hier erhaltenen, kann man immer nur eine annähernde Übereinstimmung erwarten, denn, da die Objektive eine chromatische Längsaberration besitzen, so überlagern sich verschiedene Übertragungskurven und es kann immer nur für eine Farbe eine wirkliche Fokussierung erfolgen. Für die davon abweichenden Farben erhält man dann die Übertragungsfunktion, wie sie sich für eine defokussierte Einstellung ergibt.

Die Übertragungsfunktion selbst wurde so gebildet,

dass die auf dem Oszillographenschirm sichtbare Kurve photographiert wurde und in der Projektion nach der vorne angegebenen Formel der Kontrast als Funktion des Gitterabstandes ermittelt wurde. Um die Messungen der Praxis anzugleichen, und um einen einheitlichen Bezugspunkt zu haben, wurde dabei die Einstellung auf bestes Auflösungsvermögen für das grösste Öffnungsverhältnis auch für die anderen Öffnungsverhältnisse, wie auch für die von der Achse abweichenden Bildwinkel beibehalten. Man kann so durch Ablesung an der in Abb. 2 sichtbaren Messuhr durch Nachstellen die Blendendifferenz ermitteln und auch messen, wie die Bildfeldwölbung verläuft. Da man diese Messungen sowohl für den meridionalen wie auch für den sagittalen Schnitt durch Schwenken der Test-

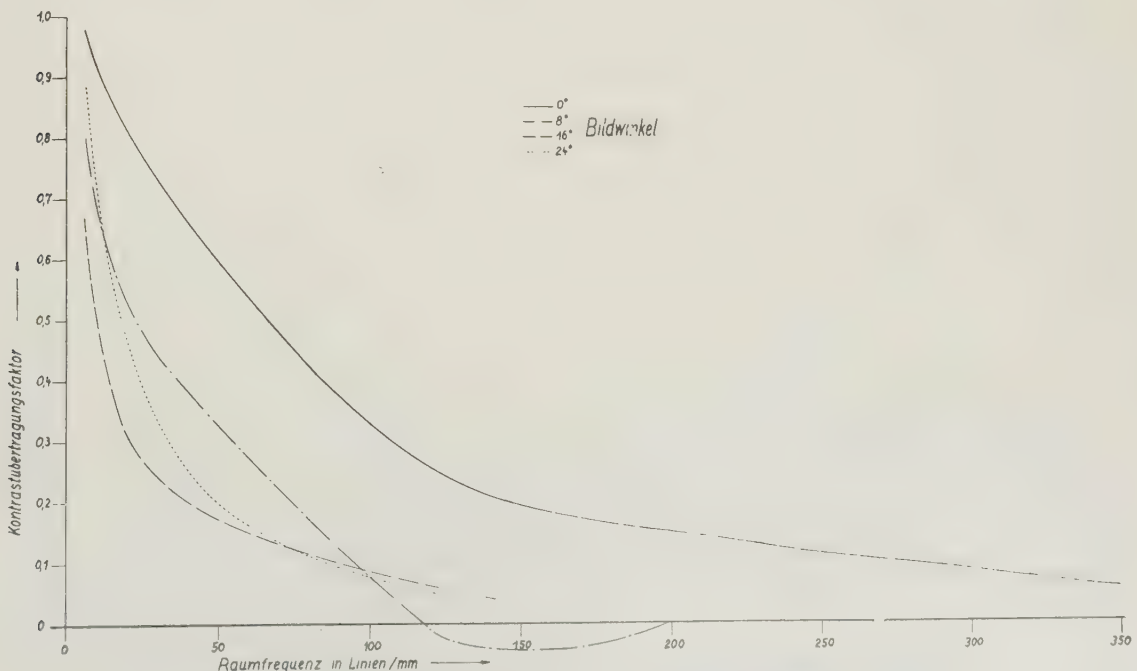


ABB. 5. — Kontrastübertragungsfunktion für ein Kleinbildobjektiv $f = 50$ mm, 1 : 2 ; Blende 2 senkrechte Gitterlinien für Bildwinkel von 0°, 8°, 16°, 24°.

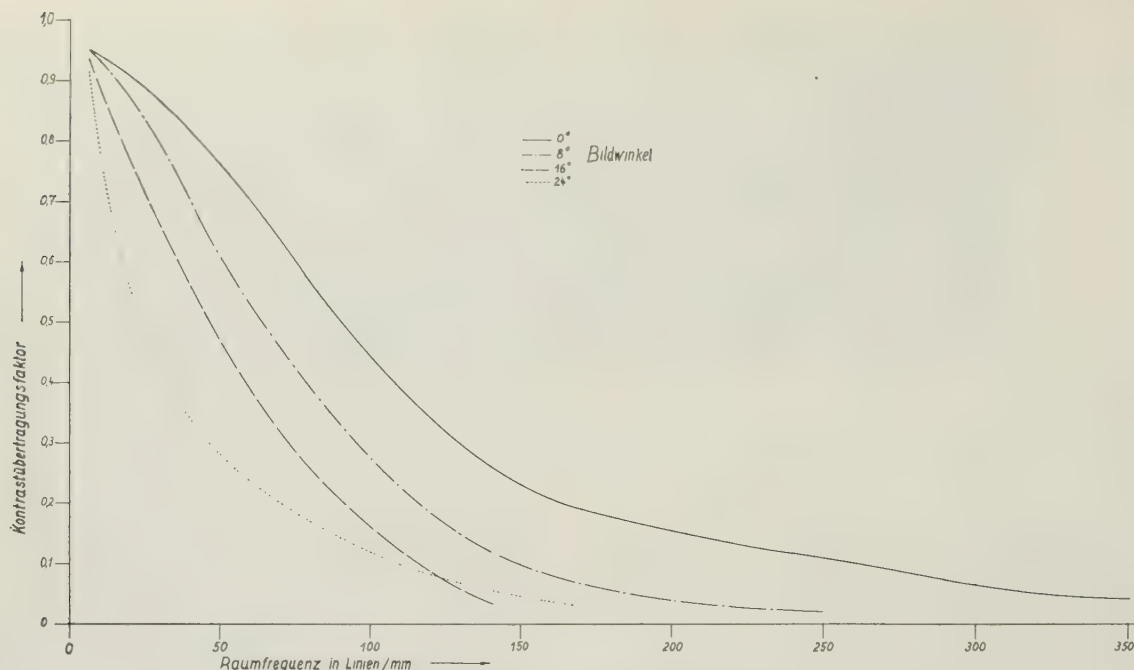


ABB. 6. — Kontrastübertragungsfunktion für ein Kleinbildobjektiv $f = 50$ mm, 1 : 2 ;
Blende 4 senkrechte Gitterlinien für Bildwinkel von 0° , 8° , 16° , 24° .

trommel und des Spaltes vor dem Multiplier um einen Winkel von 90° durchführen kann, so kann man hiermit auch den Astigmatismus feststellen. Abb. 5 stellt die Übertragungsfunktion eines hochqualifizierten Kleinbildobjektives von 50 mm Brennweite und für ein Öffnungsverhältnis von 1 : 2 für die Achse und für

verschiedene Bildwinkel dar. Abb. 6 zeigt das gleiche für Blende 4,0. Abb. 7 zeigt die gleichen Verhältnisse für den hierzu senkrechten Schnitt. Ausserhalb der Achse kann man einen Unterschied der Übertragungsfunktion für den meridionalen und für den sagittalen Bildschnitt, d. h. den Einfluss des Astigmatismus

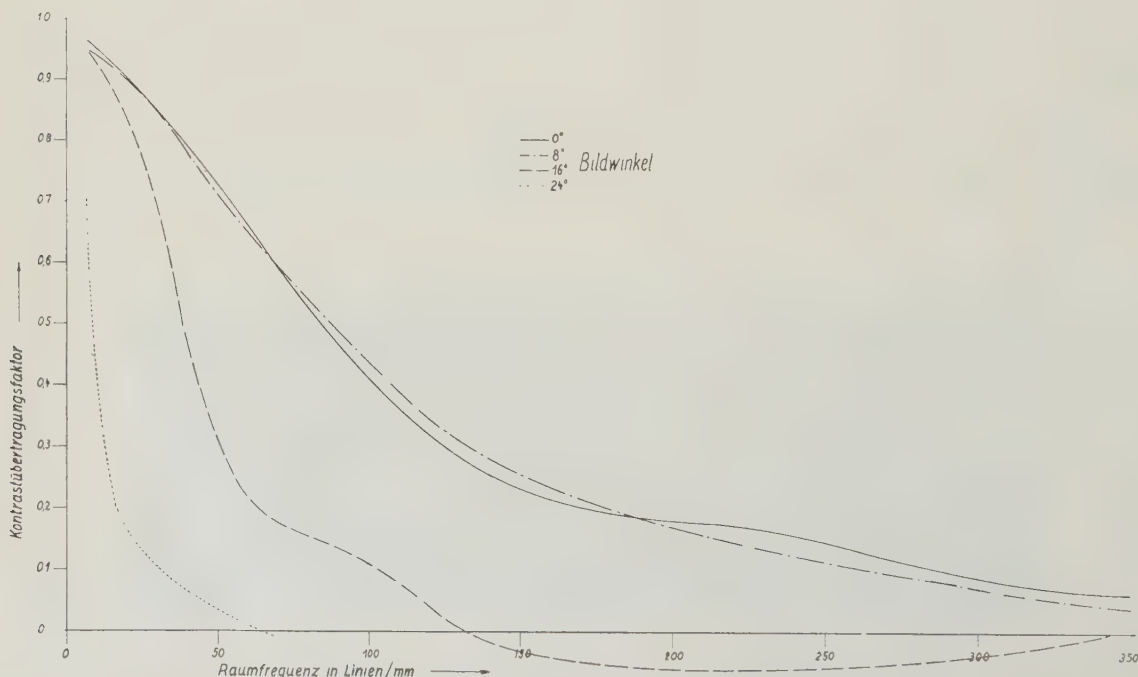


ABB. 7. — Kontrastübertragungsfunktion für ein Kleinbildobjektiv $f = 50$ mm, 1 : 2 ;
Blende 4 wagerechte Gitterlinien für Bildwinkel von 0° , 8° , 16° , 24° .

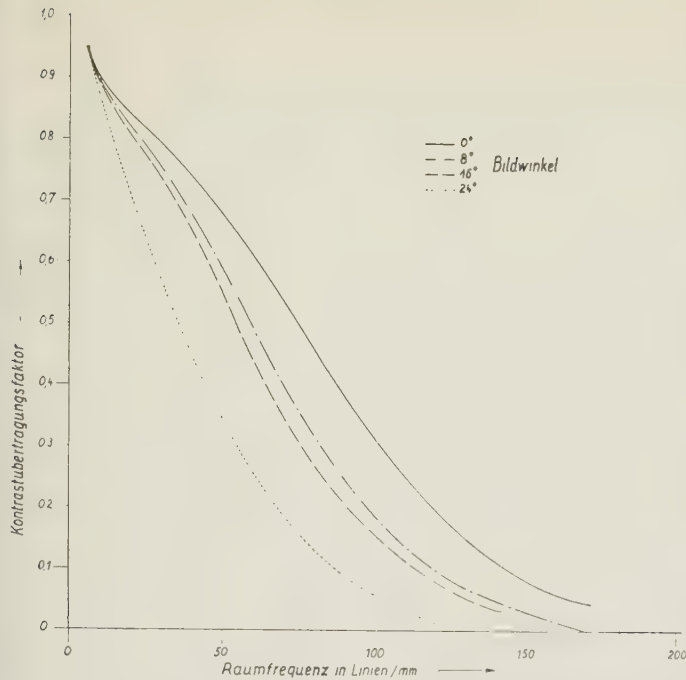


ABB. 8. — Kontrastübertragungsfunktion für ein Kleinbildobjektiv $f = 50$ mm, $1:2$; Blende 11 senkrechte Gitterlinien für Bildwinkel von 0° , 8° , 16° , 24° .

bei Vergleich mit Abb. 6, erkennen. Abb. 8 zeigt die Übertragungsfunktion für das gleiche Objektiv, jedoch für eine Abblendung auf $1:11$. In Abb. 9 wird die

Wirkung einer Defokussierung dargestellt. Die Kurve 0 zeigt die Übertragungsfunktion in der Achse für das in Abb. 5 erwähnte Kleinbildobjektiv und die mit -1 , -2 bzw. $+1$, $+2$ usw. bezeichneten Kurven stellen die Übertragungsfunktion für eine Defokussierung intra- bzw. extrafokal in $1/100$ mm dar.

Aus der Kurve der Übertragungsfunktion z. B. aus Abb. 6 kann man — wie z. B. Abb. 10 zeigt — das Auflösungsvermögen des Objektivs bei der betreffenden Abblendung für die Achse und für verschiedene Bildwinkel bei verschiedenen Kontrasten ermitteln. Aus der in Abb. 9 dargestellten Wirkung der Defokussierung lässt sich für eine vorgegebene Unschärfe und für einen vorgegebenen Kontrast die Tiefenschärfe des Objektivs unter Berücksichtigung seiner Korrektur ermitteln. Man kann so die mit Hilfe des Zerstreuungskreises für ein ideales Objektiv errechnete Tiefenschärfe mit der wirklich erreichten vergleichen.

Weiterhin kann man die tatsächlich erreichte und in der Kontrast-Übertragungsfunktion der Gesamtwirkung sichtbar gemachte Abbildungsgüte mit der theoretisch für ein ideales Objektiv errechneten vergleichen. Allerdings ist hierbei zu beachten, dass die hier gemessene Kontrast-Übertragungsfunktion für weisses Licht ermittelt wurde, während der berechneten eine monochromatische Lichtquelle der Wellenlängen $0,5 \mu$ zugrunde gelegt wurde. Abb. 11 zeigt diese Verhältnisse für ein hochqualifiziertes Objektiv (Kleinbildobjektiv $f = 50$ mm $1:2$). Die Abszisse ist hier jedoch nicht in Raumfrequenzen geteilt, sondern



ABB. 9. — Kontrastübertragungsfunktion eines Kleinbildobjektives $f = 50$ mm, $1:2$ für die Achse und volle Öffnung bei verschiedener Defokussierung.

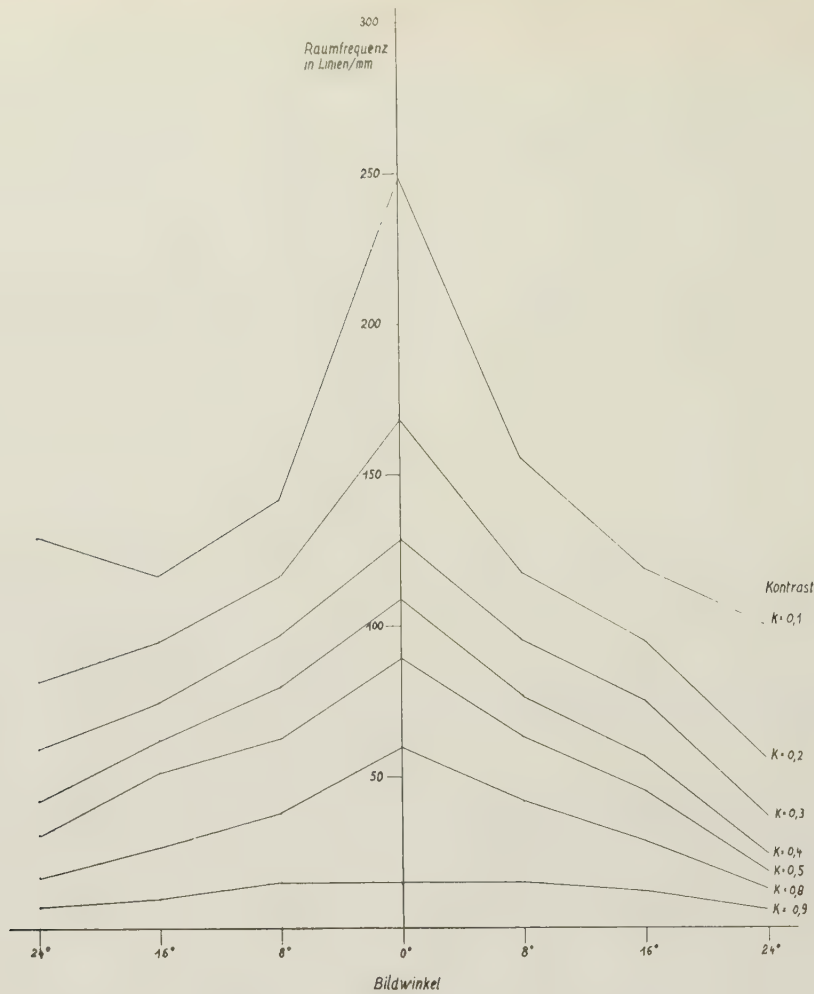


ABB. 10. — Auflösung eines Kleinbildobjektives $f = 50$ mm, $1:2$, bei Blende 4 in Abhängigkeit vom Bildwinkel bei verschiedenem Kontrast.

es ist eine normierte Raumfrequenz zugrunde gelegt worden. Die normierte Raumfrequenz s leitet sich aus der Raumfrequenz R , der Apertur des Objektives $n \sin \alpha$ und der Wellenlänge λ nach folgender Formel ab :

$$s = \frac{\lambda}{n \sin \alpha} R.$$

Man sieht aus der Abb. 11, dass mindestens von der Blende 5,6 ab praktisch die theoretische Kurve erreicht wird. Abb. 12 zeigt das gleiche für ein einfacheres Photoobjektiv. Hierbei zeigt sich, dass in der Achse selbst die Blende 11 noch nicht die theoretische Kurve erreicht. Man müsste diese Verhältnisse auch für verschiedene Bildwinkel untersuchen und könnte so ein Gesamturteil über die Gesamtbildqualität eines Photoobjektives erhalten.

Bedenkt man nun noch, dass die unter der theoretischen Kurve befindliche Fläche der Definitionshelligkeit nach STREHL [12] entspricht, so stellt das Verhältnis der Flächeninhalte unter der gemessenen

Kurve zur Gesamtfläche unter der theoretischen Kurve den praktisch ermittelten prozentualen Anteil der Definitionshelligkeit dar.

Es mag noch erwähnt werden, dass in der praktischen Photographie auch die photographische Schicht eine Kontrast-Übertragungsfunktion besitzt. Legt man die Werte zugrunde, die FRIESER [13] ermittelt hat, so kann man daraus die Kontrast-Übertragungsfunktion errechnen, die durch die gesamten Wirkungen von Objektiv und Photomaterial entstehen. Zu beachten ist dabei, dass bei Hintereinanderschalten zweier Übertrager entsprechend den Ergebnissen der Vierpoltheorie eine Multiplikation der Kontrast-Übertragungsfunktionen erforderlich wird. Man sieht hierdurch leicht ein, dass eine lineare Superposition des Auflösungsvermögens der photographischen Schicht und die des Auflösungsvermögens des photographischen Objektives im allgemeinen nicht zu richtigen Werten führen kann. Abb. 13 stellt die Kontrast-Übertragungsfunktion für das System aus einem gut

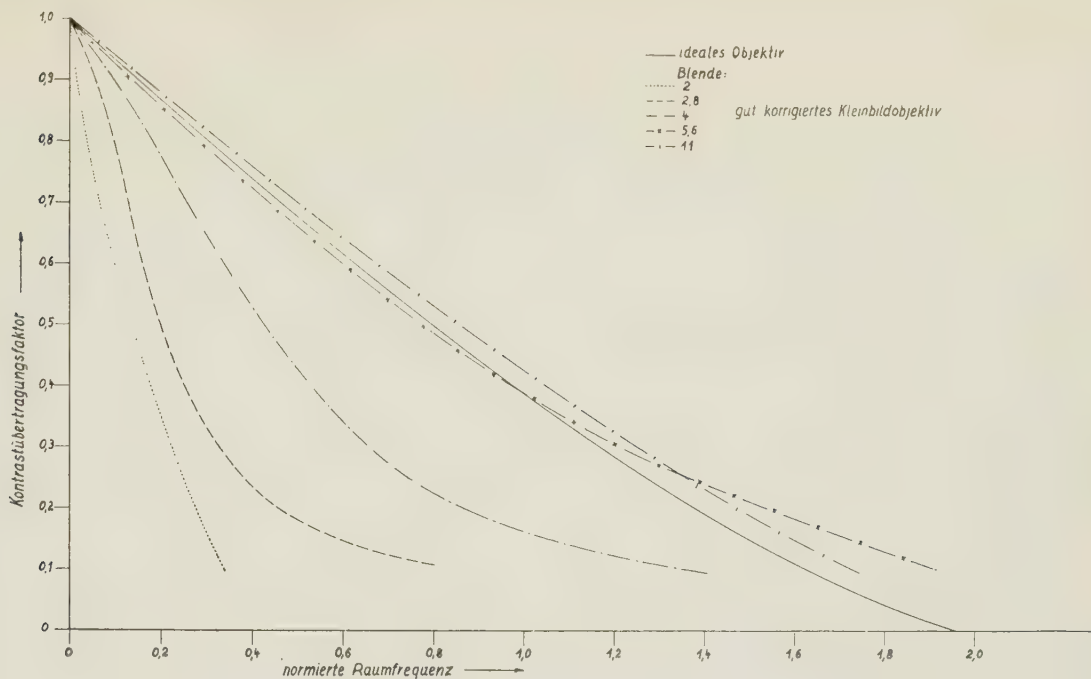


ABB. 11. — Normierte Kontrastübertragungsfunktion für die Achse eines idealen Objektives und für ein Kleinbildobjektiv $f = 50$ mm, 1 : 2 bei verschiedener Abblendung.*

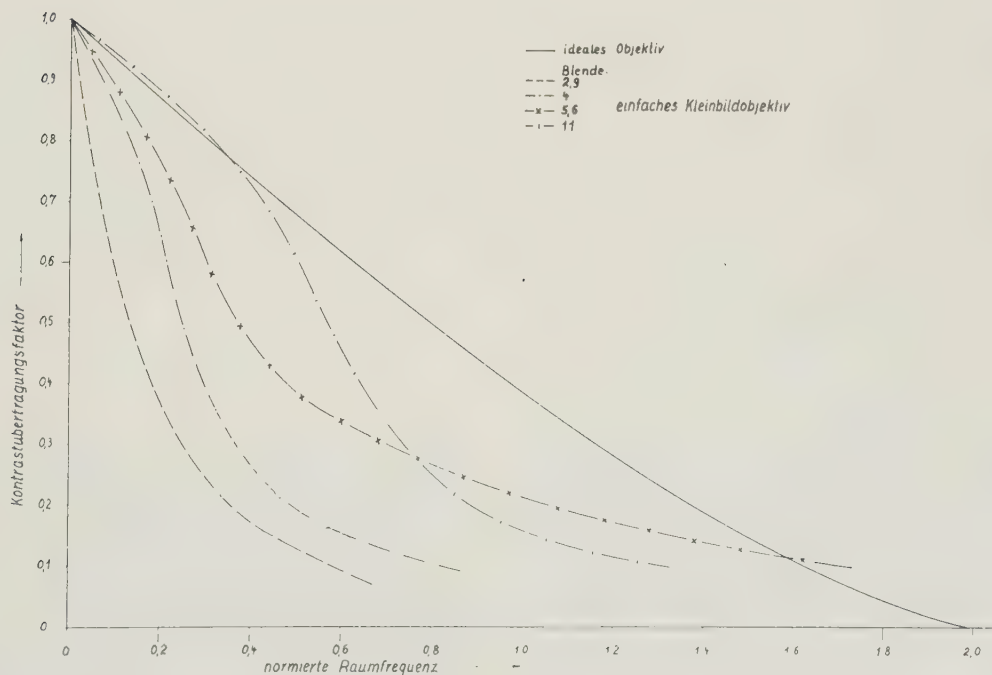


ABB. 12. — Normierte Kontrastübertragungsfunktion für die Achse eines idealen Objektives und für ein Kleinbildobjektiv geringerer Güte $f = 50$ mm, 1 : 2,9 bei verschiedener Abblendung.*

* Bei einer Überprüfung der Messwerte ergab sich, dass die in s eingesetzten Aperturwerte $n \cdot \sin \alpha$ um 20 % zu gross waren, so dass bei Berücksichtigung dieser Korrektur alle Kurven unter der idealen liegen.

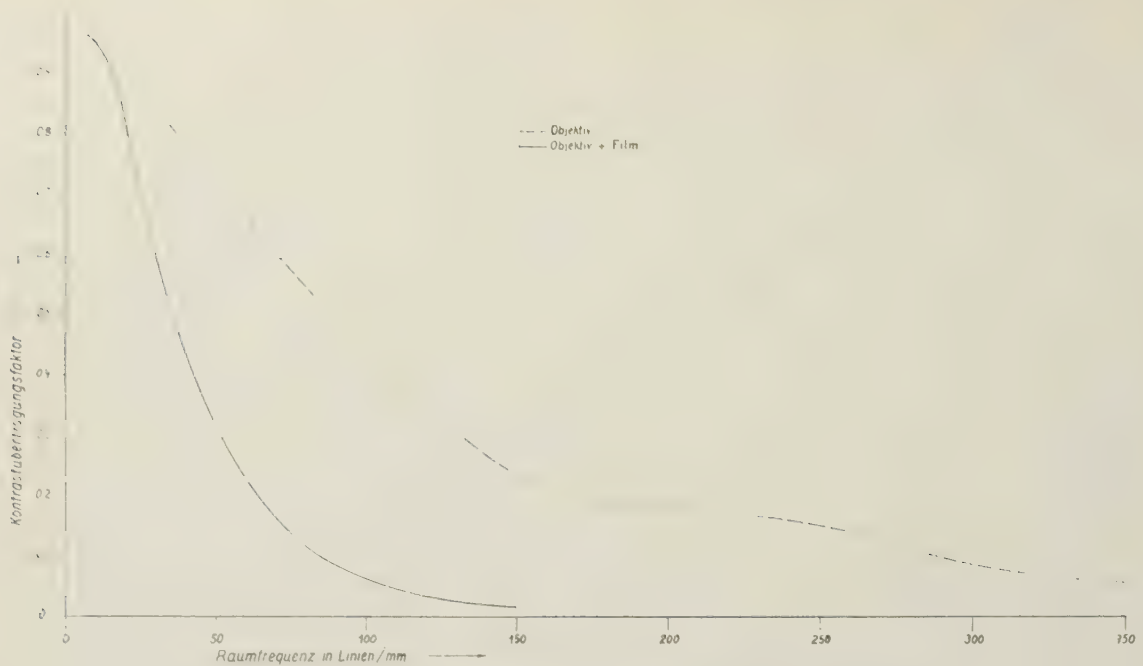


ABB. 13. — Kontrastübertragungsfunktion für die Achse der Kombination Kleinbildobjektiv $f = 50$ mm, 1:2 bei Blende 4 und feinschneidender Film.

auflösenden handelsüblichen Film und einem Kleinbildobjektiv für die optische Achse dar. Bedenkt man, dass die Kontrastschwelle des Auges bei etwa 0,2 liegt, so sieht man, dass für das Gesamtauflösungsvermögen von Objektiv und Film sich Werte von etwa 60-70 Linien pro mm ergeben, was mit direkten praktischen Messungen gut übereinstimmt.

Aus Vorstehendem ergibt sich die praktische Brauchbarkeit der genannten Methoden. Zur Zeit wird diese Methode auch auf die Bestimmung des Auflösungsvermögens bzw. der Kontrast-Übertragungsfunktion von Fernrohren angewandt. Über die Ergebnisse wird später berichtet werden.

Der Einfluss des nicht bilderzeugenden Lichtes, das durch diffuse Streuung im Objektiv z. B. durch Vielfachreflexion, Trübheiten im Glas, Streuung an den Fassungsändern u. ä. entsteht, wird mit der angegebenen Methode nur in dem Masse erfasst, wie der Test selbst als Streulichtquelle wirkt. Unter ungünstigen Umständen kann jedoch der ganze Halbraum vor dem Objektiv als Streulichtquelle wirken und das Bild mit einem Streulichtuntergrund versehen. Die gemessenen frequenzabhängigen Kontrastübertragungskurven werden daher in der Praxis oft um einen frequenzunabhängigen Betrag verändert, der vom Streufaktor des Objektivs abhängt und in seiner Grösse mit der Lichtverteilung zwischen abgebildetem Objekt und Streulicht erzeugender Umgebung stark schwanken kann.

Ferner ist auch die Intensitätswiedergabe in der Bildebene in Abhängigkeit vom Bildwinkel oft von Interesse, die von der Transparenz und Vignettierung

abhängen. Die Kontrast-Übertragungskurven der Abb. 5-8 geben jedoch nur das frequenzabhängige Verhältnis der Kontraste bei der gemessenen Linienfrequenz zur Linienfrequenz Null an, während das Bild 4 direkt die Intensitäten erkennen lässt.

Zum Schluss möchten wir nicht verfehlen, unserem Mitarbeiter, Herrn HEIM, für seine wertvolle Hilfe bei der Herstellung der Apparaturen wie auch bei der Aufnahme der Kurven unseren Dank zu sagen. Ebenso Herrn Dr HOPKINS für die Anregungen, die sich aus den Diskussionen dieses Verfahrens ergeben haben.

REFERENCES

- [1] C. E. SHANNON, *Bell Syst. tech. J.*, **27**, 1948, 379, 623; D. GABOR, *Tech. Rep. Electron. Mass. Inst. Tech.* n° 238 (1952).
- [2] E. H. LINFOOT, *J. O. S. A.*, **45**, 1955, 808.
- [3] H. H. HOPKINS, *Proc. Roy. Soc. (A)*, **217**, 1953, 408. *Proc. Roy. Soc. (A)*, **231**, 1955, 91.
- [4] M. DE, *Proc. Roy. Soc. (A)*, **233**, 1955, 93.
- [5] E. INGELSTAM und P. LINDBERG, *Proc. Symp. on Optical Image Evaluation*, Nat. Bur. Stand., oct. 1951; *Circ. U. S. Bur. Stand.* 526 p. 171.
- [6] O. H. SCHADE, ebenda p. 231.
- [7] O. H. SCHADE, *J. Soc. Mot. Pict. Engrs.*, **56**, 1951, 137; **58**, 1952, 181.
- [8] O. H. SCHADE, *R. C. A. Rev.*, **9**, 1948, 245, 490.
- [9] E. SELVYN und J. TEARLE, *Proc. phys. Soc.*, **58**, 1946, 493.
- [10] P. LINDBERG, *Opt. Acta*, **1**, 1954, 80.
- [11] H. H. HOPKINS, *Opt. Acta*, **2**, 1955, 23.
- [12] STREHL, *Z. InstrumKde*, **17**, 1897, 304.
- [13] H. FRIESER, *Photogr. Korr.*, **91**, 1955, 69.

Manuscrit reçu le 26 Juillet 1956.

The effect on the human electroretinogram of the distribution of flux in a light stimulus of finite duration *

LUCIA RONCHI and J. D. MORELAND

Istituto Nazionale di Ottica, Arcetri, Firenze (Italia)

SUMMARY. — *The dependence of the human ERG on the flux distribution in a white light stimulus is examined for two observers in the dark adapted state. The stimulus is broken down into three variables: time of rise, time of exposure, and peak intensity. The response is analysed with regard to three characteristics: height, slope and latency-time of the b-wave.*

On increasing independently exposure time or peak intensity, both the height and slope of the b-wave increase and tend to saturation in the limit. Latency-time shows little or no change. A BUNSEN-ROSCOE relation between peak-flux and exposure time appeared to hold for one observer.

When the time of rise is changed, keeping exposure time and peak intensity constant, no change in the ERG is recorded although the total energy contained in the stimulus may be changed twofold. The analysis of the ERG with a view to revealing a BUNSEN-ROSCOE relation is therefore an oversimplifying procedure: the rod mechanism cannot be considered as a simple integrating system.

Short-duration stimuli reveal the x-wave response (characteristic of the cone mechanism) which appears in three modes of roughly equal frequency.

Analysis of records obtained for standard stimuli over a period of months shows a typically seasonal variation of appreciable magnitude in the height of the b-wave response.

SOMMAIRE. — *L'influence de la distribution du flux sur l'électrorétinogramme (ERG) humain pour un stimulus de lumière blanche est étudié pour 2 observateurs adaptés à l'obscurité.*

Les 3 composantes du stimulus sont le temps d'établissement, le temps d'exposition et le maximum d'intensité.

La réponse est analysée en fonction de trois caractéristiques: hauteur, pente et temps de latence de l'onde-b.

Si le temps d'exposition ou le maximum d'intensité augmente indépendamment, la hauteur et la pente de l'onde-b augmentent tous deux et tendent à la saturation. Le temps de latence ne montre que peu ou pas de changement. La relation de BUNSEN-ROSCOE entre le flux maximum et le temps d'exposition semble se maintenir pour un observateur.

Quand le temps d'établissement est changé, le temps d'exposition et le maximum d'intensité restant constants, aucun changement n'apparaît dans l'ERG bien que l'énergie totale du stimulus ait été doublée. L'analyse de l'ERG cherchant à vérifier la relation BUNSEN-ROSCOE est de ce fait considérablement simplifiée: le mécanisme des bâtonnets ne peut être considéré comme une simple intégration.

Des stimuli de brève durée donnent la réponse de l'onde-x (caractéristique du mécanisme des cônes) qui se manifeste de trois façons différentes à des fréquences sensiblement égales.

L'analyse des résultats obtenus pour des stimuli standards sur une période de plusieurs mois montre une variation saisonnière typique et appréciable dans la réponse de l'onde-b.

ZUSAMMENFASSUNG. — *Am Menschaugen wird die Abhängigkeit des ERG von der Lichtverteilung in einem weissen Reizlicht während der Dunkeladaptation bei zwei Beobachtern gemessen. Der Reiz wird nach drei Veränderlichen aufgegliedert: Anstiegszeit, Gesamtdauer und Gipfelwert. Die erhaltenen Kurven werden nach drei charakteristischen Werten analysiert: Höhe, Steigung und Latenzzeit der b-Welle.*

Wenn man unabhängig voneinander die Gesamtdauer oder den Gipfelwert erhöht, so nehmen auch Höhe und Steigung der Welle zu und nähern sich einem festen Sättigungswert. Die Latenzzeit zeigt hingegen keine oder nur eine unbedeutende Änderung. Das BUNSEN-ROSCOE sche Gesetz zwischen Gipfelwert und Gesamtdauer scheint für einen der Beobachter zu gelten.

Bei einer Änderung der Anschwellzeit des Reizes unter Beibehalten der Gesamtdauer und des Gipfelwertes zeigte sich keine Änderung des ERG, obwohl die Gesamtenergie des Reizes auf das Doppelte erhöht wurde. Die Analyse des ERG im Hinblick auf eine Bestätigung des BUNSEN-ROSCOE schen Gesetzes ist deswegen ein allzu einfaches Vorgehen. Der Stäbchenmechanismus kann nicht als ein einfacher integrierender Vorgang angesehen werden.

Kurzzeitige Reize ergeben die x-Welle (charakteristisch für den Zapfenmechanismus), die in drei Arten näherungsweise gleicher Häufigkeit auftritt.

Die Analyse über Monate sich erstreckender Messungen mit Normalreizen zeigt in der Höhe der b-Welle eine typische jahreszeitliche Schwankung von beträchtlicher Grösse.

Introduction. — From time to time parallels have been drawn between some characteristics of human vision and the electrical response to light for the eyes of the lower animals, with a word of caution with regard to the difference in species. Now, with the advent of satisfactory contact-lens techniques in the recording of the human electroretinogram (ERG), experiments are being conducted in some laboratories in both the objective and subjective fields.

Attempts to correlate the electrical and psychophysical responses of the eye take on, therefore, a greater significance. However, the removal of the earlier obstacle of a species difference only underlines even more strongly the necessity of proceeding carefully in the drawing of parallels.

The present work is part of an investigation into the effect on the ERG of the time distribution of a light stimulus. The growth and decay of the stimulus employed is shown in figure 1. The rate of rise (over section A B) and the time of exposure (section A D) are independently variable. In an initial study reported by one of us [1] the duration of the steady level BC was made effectively infinite (i. e. greater than 0.6 sec. for recording purposes), and only the time of rise was varied. This type of stimulus was called a

* The research reported in this document has been made possible through the support and sponsorship of the Air Research and Development Command, United States Air Force, through its European Office, under contract No. AF61 (514)-634 C with the Istituto Nazionale di Ottica, Arcetri-Firenze (Italy).

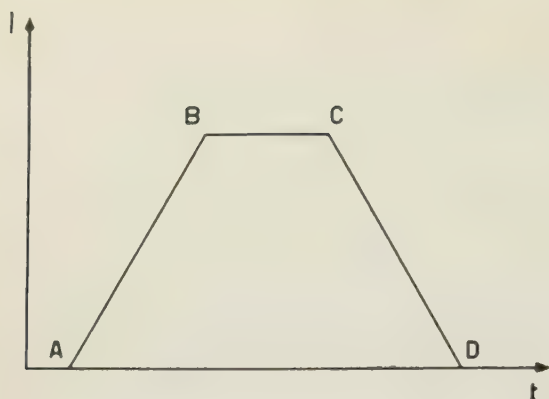


FIG. 1. — Generalised stimulus form.

« time-gradient of illumination ». Results were obtained for both light- and dark-adaptation. It was found that both the shape and size of the ERG were independent of the time of rise if this was less than 70 msec.

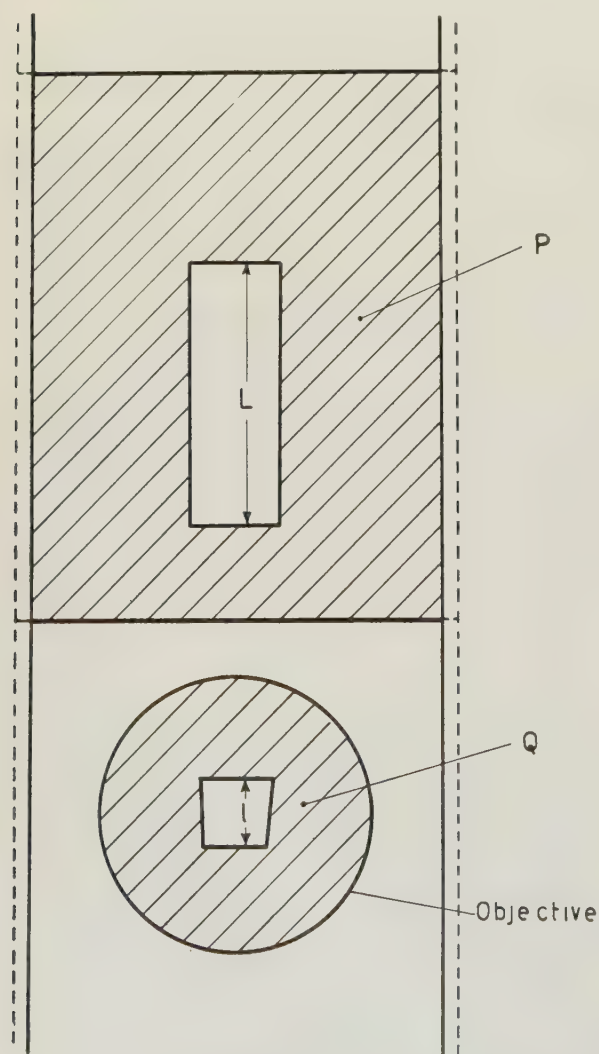


FIG. 2. — Falling plate on objective aperture.

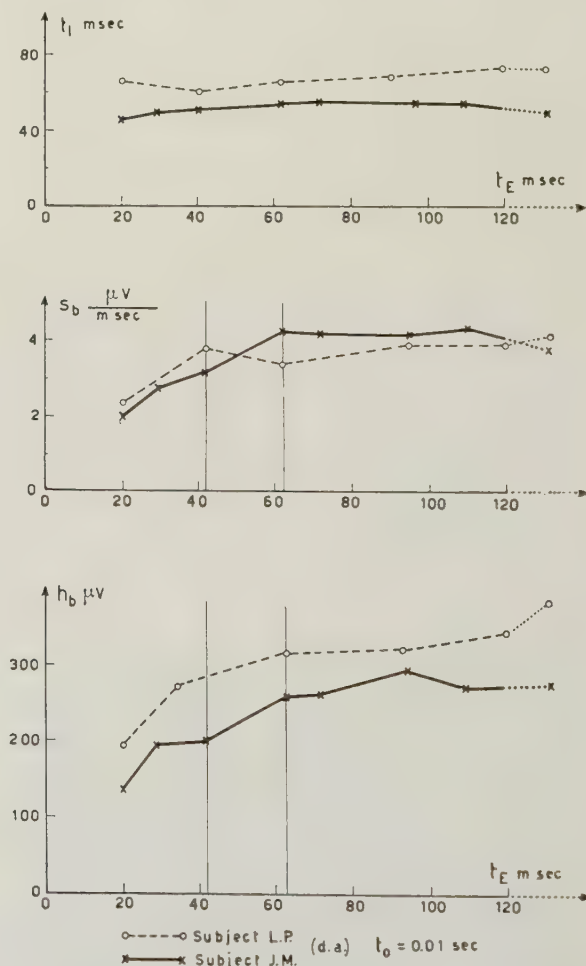
For higher values the amplitude of the b-wave remained constant and its slope decreased while the latency time increased.

The present paper reports experiments in dark adaptation using a wider variety of stimulus forms in which time-gradients of illumination occur as a limiting case.

Some interest for this paper rests on the BUNSEN-ROSCOE law. GRANIT [2] has reviewed the connection of earlier electroretinographic work with this subject.

In a more recent study JOHNSON and BARTLETT [3] have investigated the effect of duration and intensity of a light stimulus on the b-wave of the human ERG. It was found that in order to produce a b-wave of some fixed amplitude, the intensity and exposure time of the stimulus were interchangeable for exposure times less than 100 msec. For times greater than this only the intensity played a part.

I. Apparatus.— The apparatus has been described in an earlier paper [1] but there have been some

FIG. 3. — Variation of height (h_b), slope (s_b) and latency time (t_l) of the b-wave with exposure time (t_E) for a constant peak intensity.

changes in conditions. A summary is given below with an amplification of some points relevant to the present paper.

The Stimulation System. — A white light source is imaged by an objective on to a 3 mm diameter circular aperture. This aperture is viewed through an eye-lens, which projects it to infinity and defines the field of view, which is 3.4° , approximately. The eye-lens images the objective at the eye pupil, but since the

objective aperture is used to control the stimulus intensity, the size of this image is variable. However, even for the largest aperture this is not more than 2 mm.

A slot P (fig. 2) in a plate falling under gravity crosses the light beam close to the objective and passes the light stimulus. The objective is stopped down to the shape of the trapezium Q (for a linear rate of rise of intensity, Q should be provided with sides which are suitable parabolic arcs).

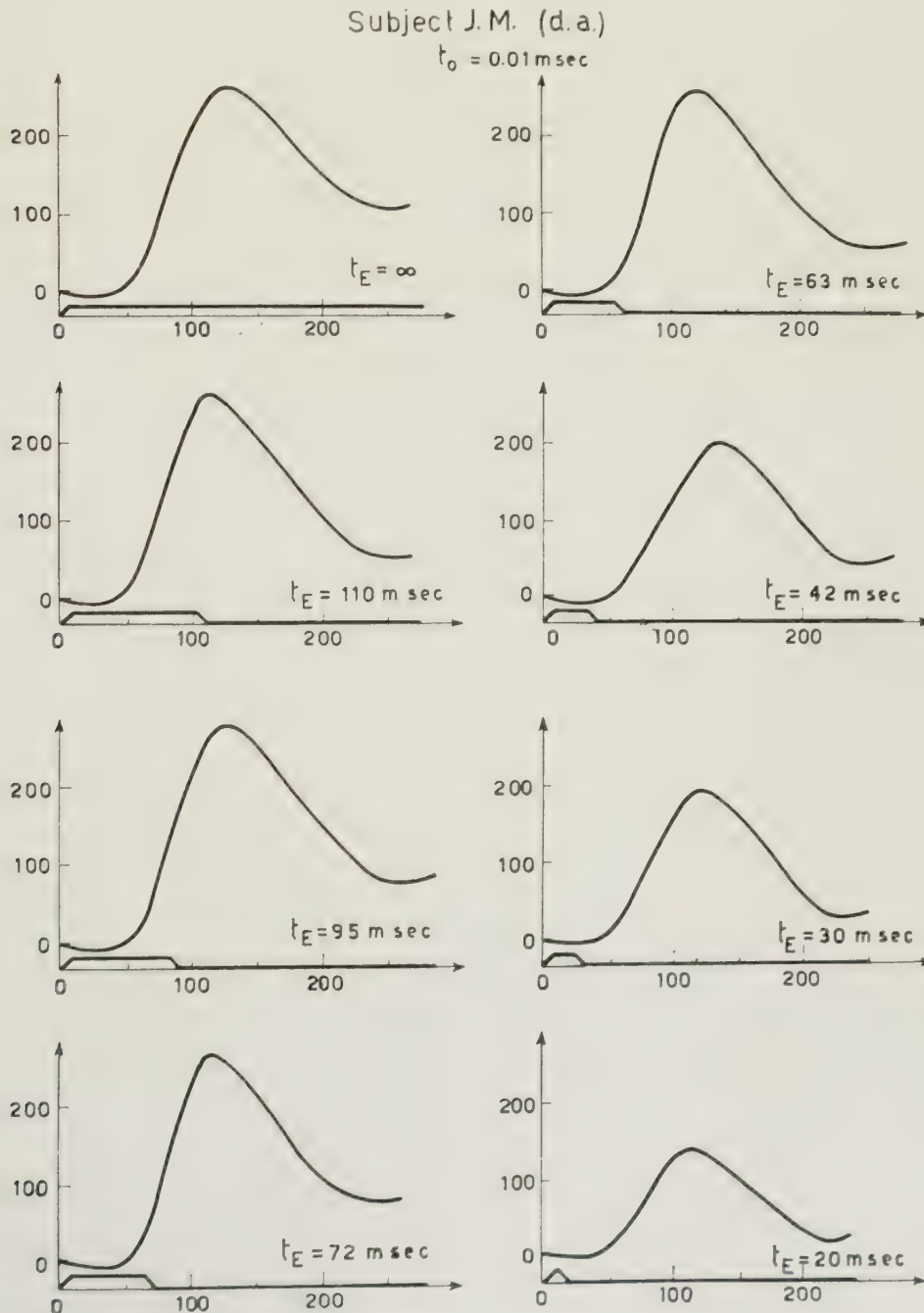


FIG. 1. — Variation of the ERG with exposure time (t_E) for a constant peak intensity.

The time of rise of the stimulus depends on the drop-height of P and the height l of Q, while the drop-height of P in combination with the length L of P determines the time of exposure. The stimulus intensity is controlled by the area of the trapezium.

This optical system ensures that the same changes

in intensity occur simultaneously on all parts of the retinal image, a requirement fundamental to the present study.

The Recording System. — Electrical potentials are picked up between a silver electrode mounted on the

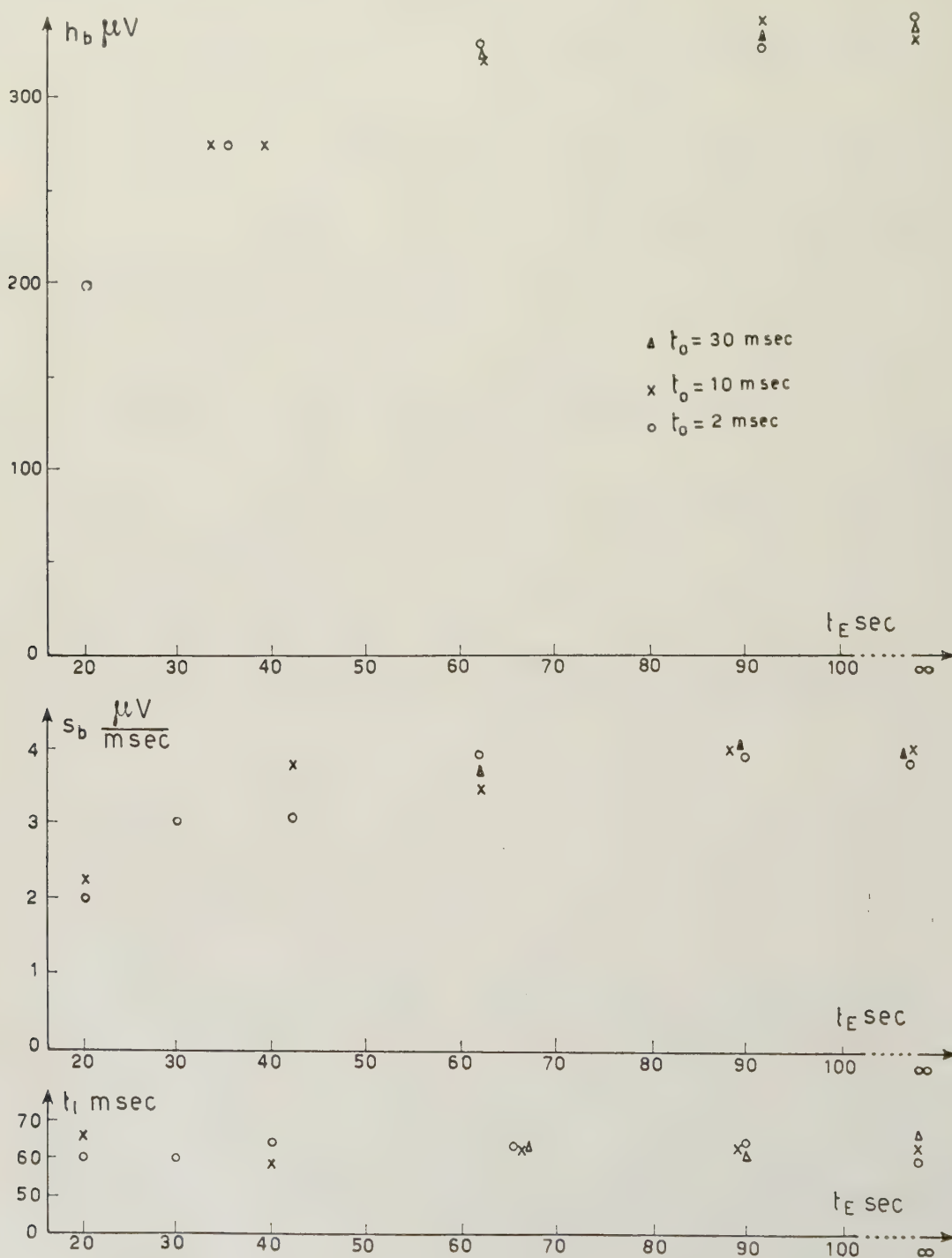


Fig. 5

FIG. 5. — Variation of height (h_b), slope (s_b) and latency time (t_l) of the b-wave with exposure time (t_E) for a constant peak intensity, using three times of rise (t_0).

corneal bulge of a contact lens and an indifferent silver electrode on the forehead. The signals are passed through a capacitance-coupled amplifier to an oscilloscope. At the amplifications which are used the noise level is about 10 μ V. The sweep of the oscilloscope is provided by means of a circuit activated by the falling plate P. The responses are recorded photographically simultaneously with the form of the light stimulus.

II. **Method.** — After inserting the contact lens the observer dark adapts for some 20 minutes or so. The head is steadied by the dental impression method and the test field fixated foveally. In the absence of the stimulus, fixation is maintained by a red spot of low luminance. Between the presentation of each stimulus and the next, a period of dark adaptation is allowed.

This interval varies from $\frac{1}{2}$ mn to 5 mn depending on the duration of the stimulus employed. Each stimulus is presented at least 10 times and in each session the responses to a standard stimulus also are recorded to keep a check on the constancy of conditions and day-to-day variations.

On one or two occasions a general drift was found in the magnitude of the response to the same stimulus throughout a session. This could not always be attributed to incomplete dark-adaptation, but such records are excluded from the present analysis.

Two observers took part, J. M. and L. P. Over a period of some months a large general drift in the response to the standard stimulus was noticed (see Appendix).

III. Symbols.

The Stimulus. — Time of rise in msec t_0
Time of exposure in msec t_E

<i>The b-Wave Response.</i> —	Maximum height in μV .	h_b
	Rate of rise in $\mu\text{V}/\text{msec}$.	s_b
	Latency time in msec . .	t_b

IV. **Experiment 1.** — The maximum level of the stimulus is kept constant at 100 lux at the pupil plane.

This statement is rather ambiguous when it refers to short duration stimuli. It is understood here as a specification of the luminance of the field if the horizontal section BC (fig. 1) were continued for an indefinite period.

Keeping t_0 constant at 10 msec., records were obtained for t_E varying from 20 msec to infinity (i. e. greater than 600 msec). In figure 3 are shown the variations of h_b , s_b , and t_L with changes in t_E . It is

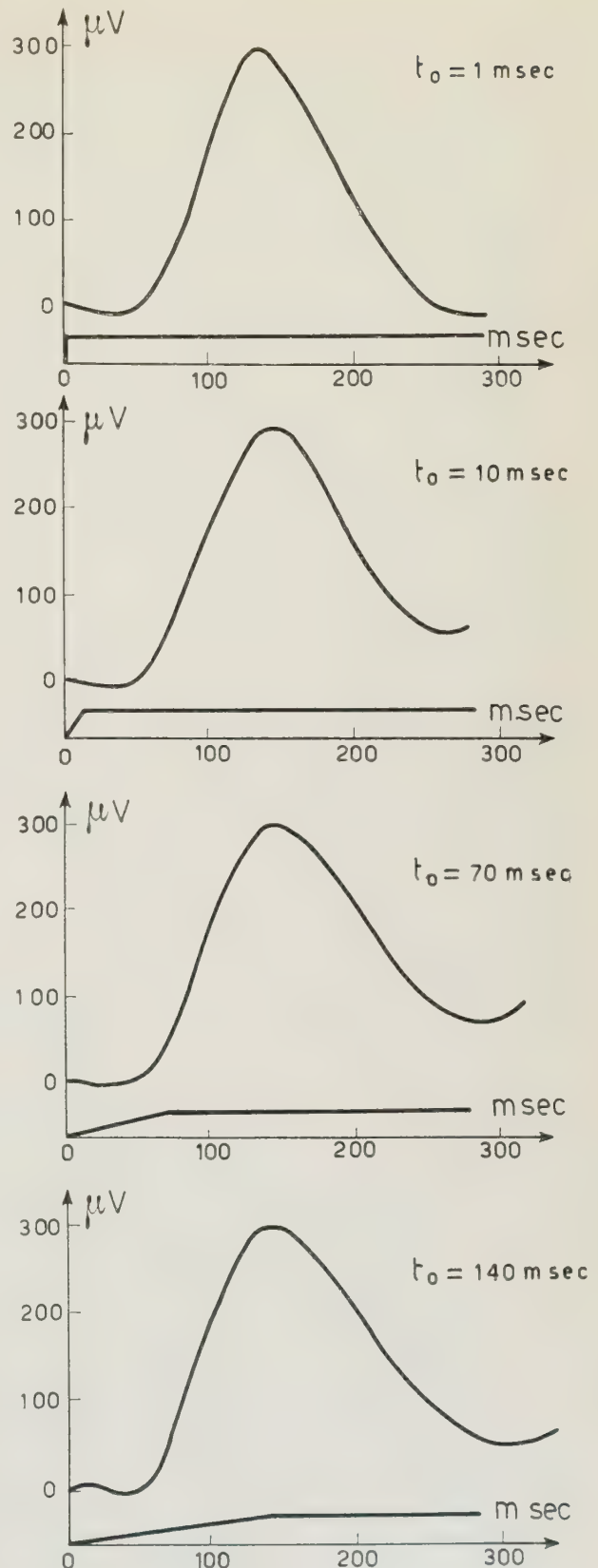


FIG. 6. — Variation of the ERG with the time of rise (t_0), keeping peak intensity constant, and for time of exposure (t_e) effectively infinite.

seen that h_b increases with t_E rapidly at first and then more slowly, tending towards saturation. A similar change occurs for s_b but t_L remains unaffected.

The response curves for J. M. are shown in figure 4, each being the mean of 10 or more records as are all the results reported below. The average deviation of each set of records for any particular session is about 20 μV over the range of the trace which is considered in the present analysis. Below each trace the form of the light stimulus is indicated. Here we see that h_b increases with t_E for stimuli with $t_E < t_L$ (t_L being constant at 50 msec). But when $t_E > t_L$ then h_b no longer depends on t_E .

To verify whether or not the time of rise played any part here, the experiment was repeated for $t_0 = 2$ msec and for $t_0 = 30$ msec. The results for L. P. are shown in figure 5. The same has been verified for J. M. The values for $t_0 = 10$ msec are those found in figure 3. No points are possible for $t_0 = 30$ msec when t_E is less than 60 msec since the stimulus form is symmetrical.

It is seen that within experimental error the three sets of observations coincide. The same agreement is found for J. M.

It is useful to recall at this point some results obtained previously [1] for another observer S. G. in which time-gradients of illumination were employed using a 1° field but the same peak intensity. These are summarized in figure 6.

It was found that in each case for $t_0 < 70$ msec the b-wave was unaffected while in the interval

$70 < t_0 < 140$ msec the value of s_b fell, h_b remaining constant, and for $t_0 < 140$ msec a tendency for both h_b and s_b to decrease was shown. There was also a suggestion that t_L rises slightly for $t_0 > 100$ msec.

V. Experiment 2. — It was suggested that an increase in the peak intensity of the stimulus might compensate for a reduction in exposure time if the fractional changes in these two variables were the same. With this question in mind one of the stimuli used in Expt. 1^o ($t_0 = 10$ msec, $t_E = 20$ msec) was chosen and records were obtained for relative peak intensities of 1, 2, 3, 3.5 and 5. The average traces for J. M. are shown in figure 7 in which the stimulus forms are also indicated. In this experiment variations in the rate of rise of the stimulus must also take place, but it has been shown (see fig. 5) that changes in the time of rise from 30 to 2 msec for a given peak intensity level produce no change in the ERG. It seems improbable that a serious disturbance is introduced.

In figures 8 and 9 for subjects L. P. and J. M. respectively the traces have been analysed as before into variations in h_b , s_b and t_L . For both subjects it is found that an augmentation in peak intensity produced first an increase in h_b and later no appreciable change.

The same kind of change for s_b is recorded for subject L. P. but not for J. M. for whom s_b shows no tendency to saturate. Latency time t_L shows a small diminution for L. P. but remains constant for J. M.

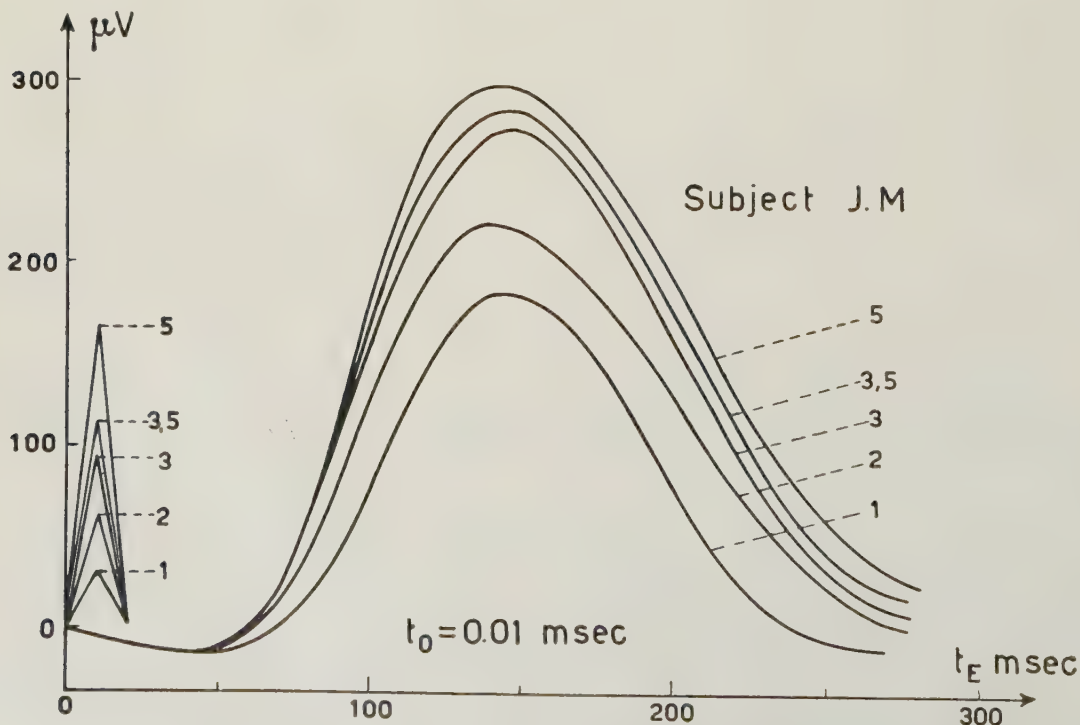


FIG. 7. — Variation of the ERG with increasing peak intensity for constant exposure time (t_E).

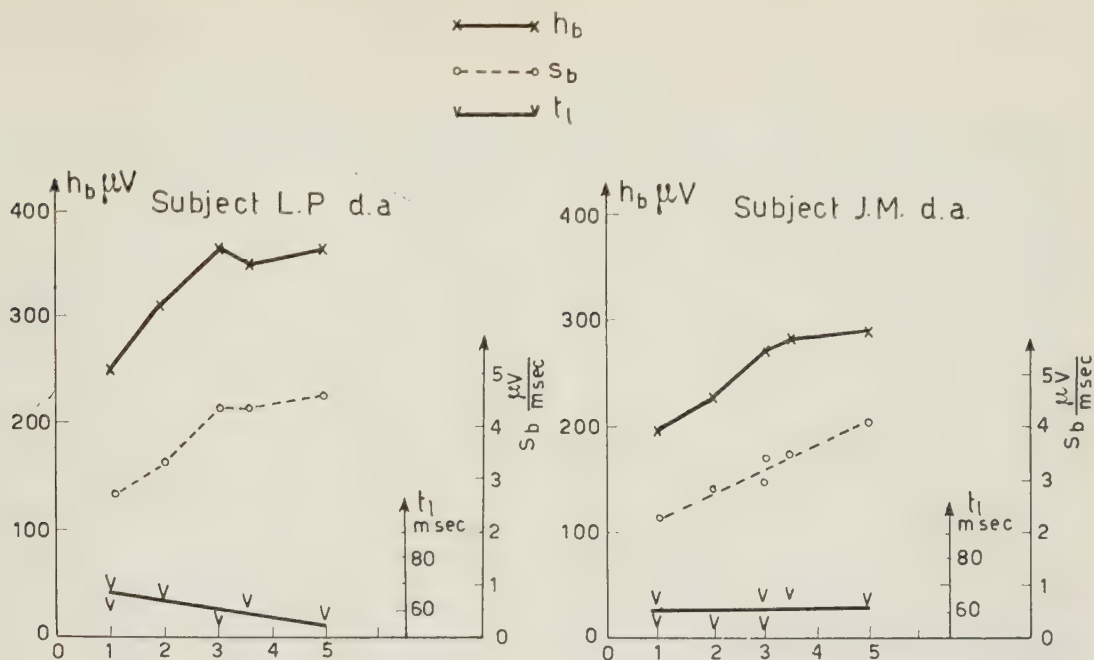


FIG. 8 and FIG. 9. — Variation of height (h_b), slope (s_b) and latency time (t_l) of b-wave with increasing peak intensity.

In order to test the possibility of a reciprocal relation between peak intensity and exposure time the results of experiments 1 and 2 are compared. The method of comparison may be best explained by reference to figures 10 and 11.

The ratios E/E_0 are plotted as abscissae where E is the total energy contained in the stimulus considered while E_0 refers to the standard stimulus for which $t_E = 20$ msec and where the relative peak intensity is 1. As ordinates the ratios h/h_0 are plotted where h and h_0 are the heights of the b-waves cor-

responding to E and E_0 respectively. The broken curves derive from Experiment I in which E is raised by increasing t_E , and the full line curves are obtained from Experiment 2 in which E is raised by increasing the peak intensity of the stimulus.

Mention should be made here of the derivation of the ratio h/h_0 . It was found early on in the experiments that variations in the response to a standard stimulus occurred from session to session. If these variations are part of some general change in the observer's condition (see Appendix) then their

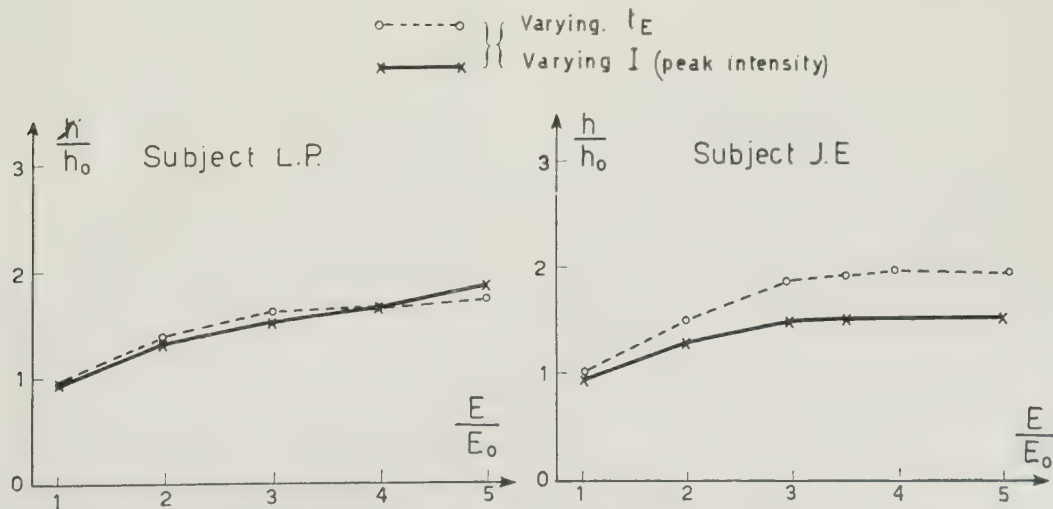


FIG. 10 and FIG. 11. — Relative changes in height of b-wave (h/h_0) with increasing exposure time (t_E) at constant peak intensity and with increasing intensity (I) at constant exposure.

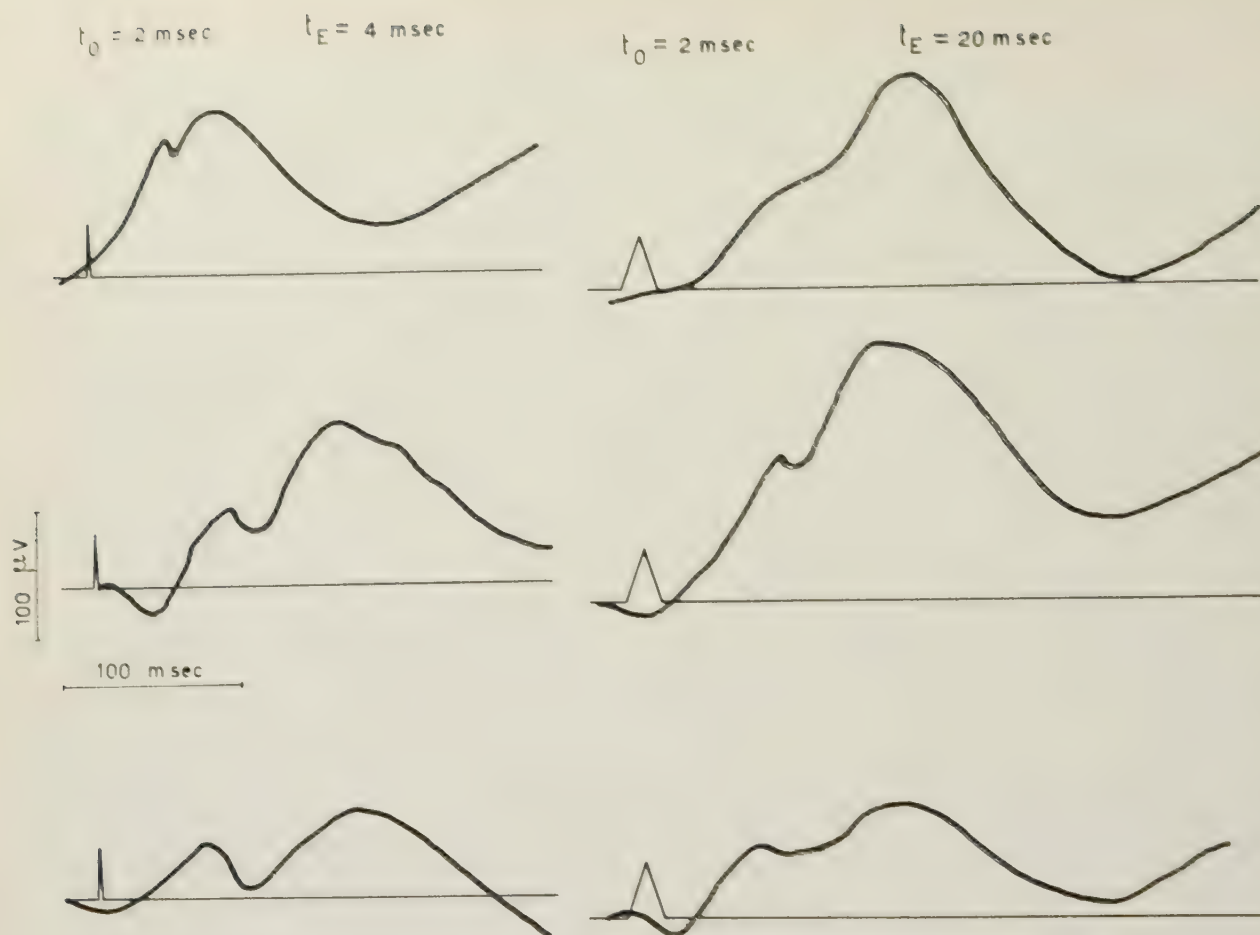


FIG. 12 and FIG. 13. — Modes of the x-wave response.

effect in the present analysis could be reduced by taking values of h and h_0 which were obtained in the same session.

For observer L. P. it is seen that in order to produce a given value of h_0 it is only necessary that the energy contained in the stimulus should be constant, at least for the range of variations that have been considered. The same cannot be said for observer J. M. for it is clear that changes in intensity at constant exposure time are more effective than increases in exposure times at constant intensity.

The divergence between the two observers is confirmed also in the following way: two points A and B are considered on the curve in figure 5 showing the variation of h_0 with t_E for constant peak intensity.

For A, $t_E = 60$ msec and for B, $t_E = 20$ msec. On reducing the intensity for A to a third, the new b-wave was recorded and found on subject L. P. to be equal to that for B but not so for J. M. Reducing intensity also involved a change in the rate of rise of the stimulus, but it has already been shown that this plays no part.

VI. Experiment 3. — For the stimuli which are used in previous experiments no definite evidence of cone activity is recorded, i. e. both the a-wave and the x-wave are either absent or barely distinguishable above the circuit « noise » level.

According to WIRTH [4] the cone contribution is brought into evidence where the time of exposure is less than 20 msec.

Using the stimulus $t_E = 4$ msec, $t_0 = 2$ msec, we find that the x-wave emerges clearly.

Of the responses examined (totalling 50 for the above stimulus) there appear to be three forms which occur with equal frequency (fig. 12). In this figure each response is split into two waves more or less separated one from the other but which, from their latency times, may be identified as the x-wave and the b-wave.

Two more stimuli for which t_E is 20 msec but for which t_0 changed from 2 msec to 10 msec were examined. In each of these cases the x-waves found were usually very small, in fact hardly perceptible above the background « noise » of the circuit (fig. 13).

However, the frequency of occurrence of the x-wave is greater for the shorter time of rise (see table I).

TABLE I

	Stimulus		x-Wave : % Response		Total No ^o of Responses
	t_0 msec	t_R msec	Absent	Present	
A	2	4	0	100	50
B	2	20	33	66	92
C	10	20	85	15	101

VII. Discussion. — In the first two experiments the findings of JOHNSON and BARTLETT [3] mentioned above have been partially confirmed for one subject L. P. but not for the other J. M., and for L. P. a BUNSEN-ROSCOE relation for stimulus peak intensity and exposure time seems to hold. However, the critical value for exposure time (i. e. the value of t_c

above which no change in h_b is recorded) is found to be of the order of 50 ~ 60 msec as compared with the value 100msec obtained by JOHNSON and BARTLETT; but since our viewing conditions are different, perhaps this is not surprising. But on looking again at Experiment 1 it will be clear that it is not possible to speak of the energy of a stimulus independently of its form, for it will be remembered that when the effect of varying the time of rise of a stimulus is tested, keeping the time of exposure and peak intensity constant, it is found to produce no effect either in h_b , h_s or t_c although the total energy contained in the stimulus might be halved and although the energy might be delivered with the latency period. This indicates that the carrying over of the BUNSEN-ROSCOE relation, from psychophysical threshold studies to the electrical response of the retina, is an oversimplification. This is illustrated perhaps more clearly in figure 14.

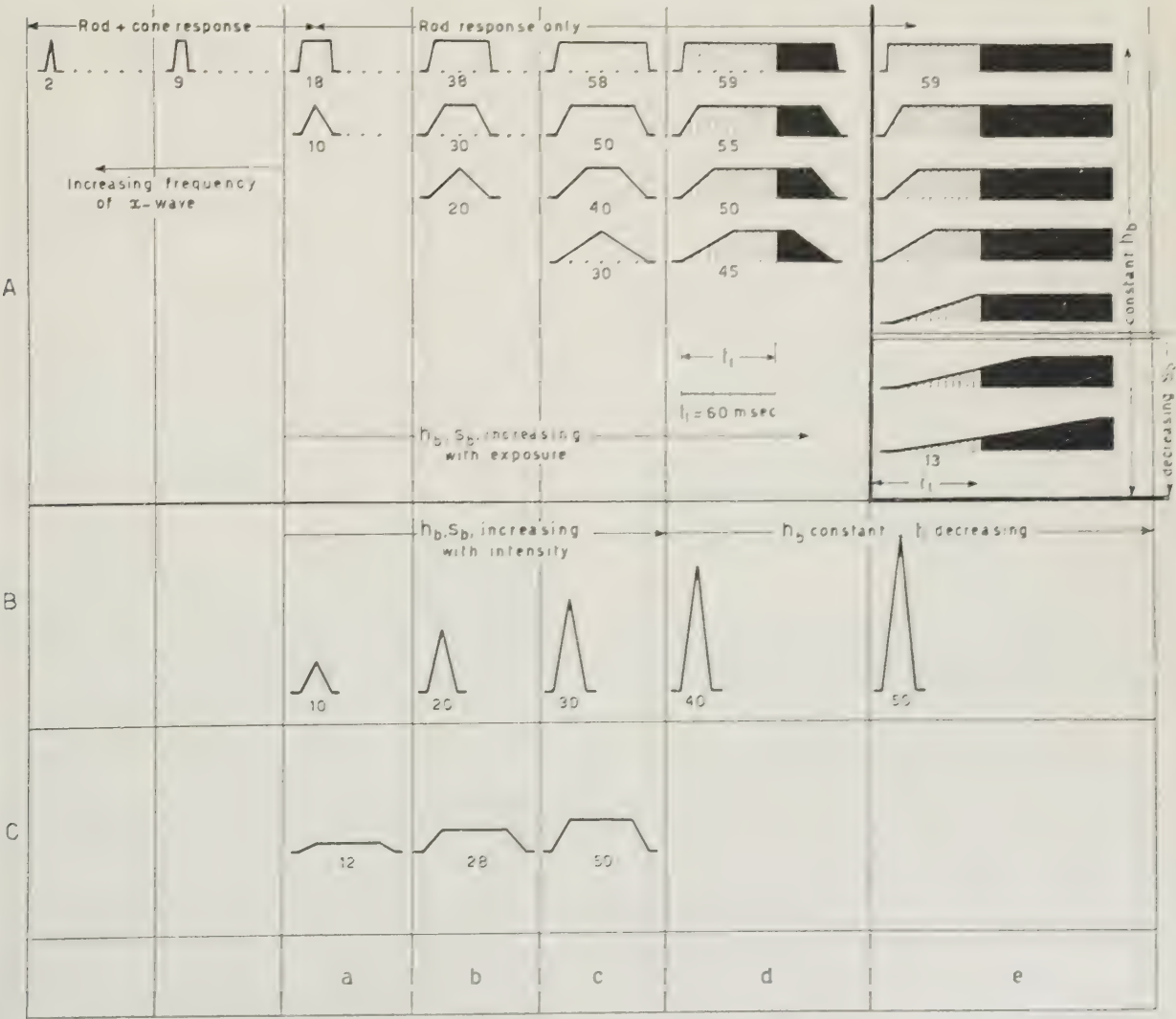


FIG. 14. — " Equivalent stimuli " : combined result.

In this figure are summarized the results from two observers: L. P. and J. M. and another observer reported in an earlier paper S. G. [1]. In the columns are shown equivalent stimuli, i. e. stimuli producing the same ERG (no change in h_b , s_b or t_L). Columns a, b, c, d, refer to experiments 1 and 2 in which row A applies to both observer L. P. and J. M. in expt. 1, while row B and C apply only to L. P. in expt. 2. Glancing down any one column brings out clearly that while it is possible to find two stimuli of the same energy which produce the same response, it is also possible to find others of different energies which do the same.

Alternatively looking from column to column we find stimuli of the same energy which produce different responses. In row B the effect of increasing intensity is shown to produce an increase in H_b up to $t_E = 30$ msec, beyond this h_b remains constant but additional energy seems to be used in producing a shorter latency time.

Row A, column e, refers to the earlier work on subject S. G. on time gradients of illumination. Here it was found that h_b is independent of the stimulus form but that when the time of rise exceeds the latency time the value of s_b falls off.

In the first two spaces and column a of row A are shown stimuli which produce a mixed rod-cone response. The shorter the exposure time, the greater the frequency of occurrence of the x-wave.

Our results seem in agreement with the fact shown by all the work on sensation from the days of KÖNIG up to the present time, and also the objective researches based on the electroretinographic response, that the dark adapted eye is highly sensitive but slow, like a ballistically recording galvanometer, and it has been assumed to integrate the total quantity of energy reaching it [5].

However, this cannot explain the apparent loss of energy that we have shown for rapidly rising stimuli, and as has been mentioned above, the total energy contained in a stimulus cannot be considered independently of the form.

We intend to continue our study in the light adaptation state. In this case, according to WRIGHT [6] and GRANIT [7], the response should consist of very complicated excitation inhibition patterns giving the higher centres a cue for discrimination.

Appendix. — It was noted early on in the work that variations in the height of the response to a given stimulus occurred from day to day and, as mentioned above, this could be allowed for, where necessary, by taking ratios. After a period of some months, however, it was found that a general drift in the size of the response was taking place above the day to day fluctuations.

In the earlier work [1] only the stimuli, termed time-gradients of illumination, were used and since the oscilloscope employed had been changed twice

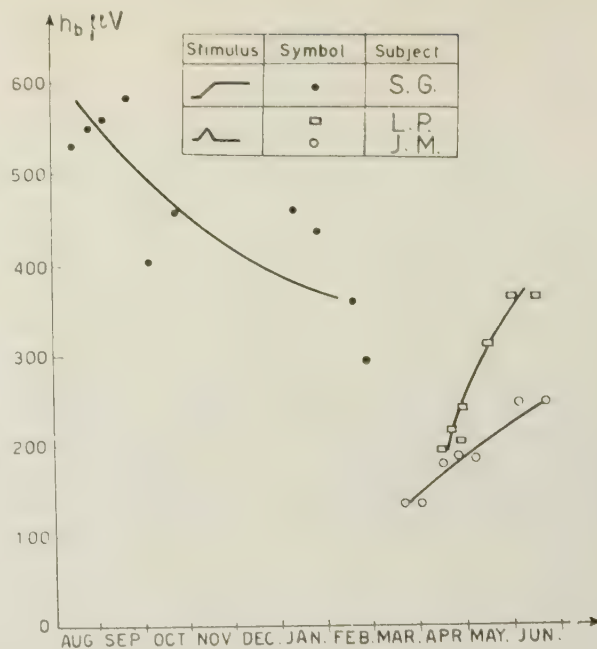


FIG. 15. — Seasonal variations in the height of the b-wave (h_b) for a standard stimulus.

during that period, the change in response was attributed to changes in circuit conditions, and the variation in the standard stimulus ($t_o = 10$ msec) was used as a correction factor for the calibration. These records refer to the period August 1955 to February 1956. For the later work, reported in the present paper, the standard stimulus used was a symmetrical flash with $t_E = 20$ msec and $t_o = 10$ msec. Both this and the earlier used standard stimulus gave rise to characteristic rod responses.

The variations in the height of the b-wave of this response are shown in figure 15. Each point is the mean value of h_b for the standard stimulus employed in any one session.

The variations are seen to be considerable over a period of months. Allowing for observer differences and assuming continuity over the whole period, there is evidence for a variation which is typically seasonal: i. e. maximum and minimum activity occurring in summer and winter respectively.

Manuscript reçu le 15 août 1956.

REFERENCES

- [1] Lucia RONCHI, S. GRAZI, The dependence of human electroretinogram on the shape of the stimulus as a function of time. *Optica Acta*, 1956 (in course of publication).
- [2] Ragnar GRANIT, *Sensory mechanisms of the retina*, Oxford, 1947, p. 180.
- [3] E. P. JOHNSON, N. R. BARTLETT, *J. O. S. A.*, **46**, 1956, 167.
- [4] A. WIRTH, *Arch. Soc. Biolog.*, **40**, 1956, 163-178.
- [5] Ragnar GRANIT, *Sensory mechanisms of the retina*, Oxford, 1947, p. 140.
- [6] W. D. WRIGHT, *J. O. S. A.*, **27**, 1937, 394.
- [7] Ragnar GRANIT, *Receptors and sensory perception* New Haven, 1955, Chapter V.

Lettres à l'éditeur

An uncertainty relation in interferometry

B. S. THORNTON

Division of Metrology, National Standards Laboratory, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Sydney, Australia.

In multiple-beam interference microscopy the measurements made of surface details can be of almost molecular magnitude, and it might be expected that the HEISENBERG uncertainty principle for photons will set some limit to the accuracy of measurement of surface details revealed.

Starting with the relation $\Delta k_x \Delta x \sim |$ for the spreading of wave groups, where k_x is the x -component of the wave number vector, INGELSTAM [1] observed that $Z/N\lambda$ was the sine of the total variation of the wave number vector in the Δx region of the wave field of the interferometer, N being the order of interference, Z the mean direction of propagation of the light and λ the wavelength used. The spreading relation given above then gives

$$(1) \quad \Delta x \Delta z \sim N\lambda^2$$

INGELSTAM gave $N\lambda^2$ only as an order of magnitude, and for the exact relation writes

$$(2) \quad \Delta x \Delta z > \frac{\alpha}{8} N\lambda^2$$

where $\alpha/8$ is a constant (unspecified) which, amongst other things, depends on the order of interference.

An independent approach to the uncertainty product (2) can be obtained as follows. The fundamental equation of interferometry is

$$(3) \quad N\lambda = 2nt \cos \theta$$

$2nt \cos \theta$ being the optical path difference between successive interfering waves, and r being the refractive index. Since light is no longer strictly monochromatic if it is not emitted over an infinite time interval, and since light sources in practice emit truly coherent wave trains only for periods of the order of 10^{-7} or 10^{-8} seconds, it is necessary to consider a wave group which, as can be shown by FOURIER's theorem, is equivalent in all its effects to the superposition of wave trains of different wavelength ranging from

$$\lambda_m - \frac{\Delta\lambda}{2} \text{ to } \lambda_m + \frac{\Delta\lambda}{2}, \text{ where } \lambda_m \text{ is the mean wave-}$$

length and $\Delta\lambda$ the range of wavelengths present. In optics the wave groups are of quite large dimensions compared with the mean wavelength λ_m . From Equation (3),

$$(4) \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta z}{t}$$

(since t is measured in the z direction). The momentum p of a photon has the same direction as the propagation vector k and has a magnitude $p = h/\lambda$ so that considering magnitude only,

$$(5) \quad \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

From Equations (4) and (5)

$$(6) \quad \Delta p = \frac{h}{\lambda} \frac{\Delta z}{t}$$

and the HEISENBERG Uncertainty Relation states that :

$$(7) \quad \Delta p_x \Delta x \geq h/4\pi$$

so that from equations (6), (7) and (3)

$$(8) \quad \Delta x \cdot \Delta z \geq \frac{N\lambda^2}{8\pi n \cos \theta}$$

which corresponds to the relation (2) with $\alpha/8$ equal to $\frac{1}{8\pi n \cos \theta}$.

That there is an uncertainty in z can also be seen by considering the electromagnetic field (E_y, H_x) incident on an interferometer with the appropriate boundary conditions to determine the fringe pattern.

The intensity distribution of the emergent light is given by

$$(9) \quad I = \frac{EE^* + HH^*}{8\pi}$$

where E and H are complex amplitudes determined from the boundary conditions for the system, the starred quantities denoting the complex conjugates.

The number of photons corresponding to I is given by

$$P(x) = \frac{EE^* + HH^*}{8\pi hc} \cdot \lambda(x)$$

where $\lambda(x) = 1/k_x$

and for a region large compared with λ , $P(x)$ is analogous to $\psi\psi^*$ in the quantum mechanics of electrons and other particles.

The HEISENBERG Uncertainty Relation for the electromagnetic field [2] states that :

$$(10) \quad \Delta E \Delta H \geq \frac{hc}{\delta t \delta v}$$

where $\delta v = (\delta l)^3$ is a small element of volume whose value depends on the method of measurement used, and c is the velocity of light.

The uncertainty in I and $P(x)$ arising from (10) gives rise to an uncertainty in z through the relation

$$(11) \quad \Delta P(x) \Delta \Phi \approx 1$$

between the phase, Φ , of the wave and the number of photons [3] $P(x)$ where, in the present case

$$\Delta \Phi = 2 \pi \Delta z / \lambda.$$

In practice the value for Δz is governed by the sharpness of the fringes since a fringe can be located to within only a certain fraction of its half width.

Essentially, equation (8) means that when a very great accuracy in depth measurement is required an unlimited accuracy in surface resolution cannot be attained.

TOLANSKY and EMARA [4], using low order multiple-beam fringes, have been able to use a multiple-beam interference microscope with high magnifi-

cation ($\times 1500$) to resolve volumes of the order of 5×10^{-15} cc which, according to the uncertainty relation (8), is almost the limit obtainable, since the minimum resolvable distance in practical microscopy is known to be $\lambda/2$, so :

$$\Delta z \Delta x \Delta y \geq \frac{N \lambda^2}{8 \pi n \cos \theta} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

i. e. the minimum resolvable volume is $\approx 3.5 \times 10^{-15}$ cc for $N = 1$, $n \approx 1$, $\theta \approx 0$, $\lambda \approx 5.5 \times 10^{-5}$ cm.

REFERENCES

- [1] INGELSTAM, E., *Arkiv för Fysik*, **7**, 1954, 309.
- [2] HEISENBERG, W., « *The Physical Principles of the Quantum Theory* », p. 48. Dover Publications Inc., N. Y., 1930.
- [3] HEITLER, W., « *The Quantum Theory of Radiation* », p. 68. Clarendon Press, Oxford, 1936.
- [4] TOLANSKY, S. and EMARA, S. H., *J. O. S. A.* **45**, 1955, 792.

Manuscrit reçu le 19 novembre 1956.

Quelques propriétés optiques des milieux stratifiés symétriques

F. ABELÈS

Institut d'Optique, Paris

Nous indiquerons, dans ce qui suit, quelques propriétés des milieux stratifiés symétriques, qui n'ont pas encore été signalées, tout au moins à notre connaissance. Un milieu stratifié est limité par deux plans parallèles et son indice de réfraction $n - jk = \sqrt{\epsilon}$ (réel ou complexe) et sa perméabilité magnétique μ sont constants dans des plans parallèles à ces deux plans et ne varient que dans la direction OZ perpendiculaire à ces plans. Le milieu stratifié sera dit symétrique lorsque $\epsilon(d - z) = \epsilon(z)$, $\mu(d - z) = \mu(z)$, d étant son épaisseur totale, étant entendu qu'il s'étend entre les plans $z = 0$ et $z = d$.

Nous supposons d'abord que le milieu stratifié symétrique est absorbant ($k \neq 0$), et qu'il est limité par deux milieux non absorbants homogènes d'indices de réfraction n_0 et n_s . Nous désignerons par r , r' et t les coefficients (complexes) de réflexion pour une onde incidente du côté du milieu d'indice n_0 ou n_s et pour une onde transmise respectivement (1). Les facteurs de réflexion et de transmission seront désignés par R , R' , T , tandis que les déphasages par réflexion et par transmission seront δ_r , δ_r' , et δ_t . Nous aurons donc $r = R^{1/2} e^{j\delta_r}$, etc. Expérimentalement, on mesure, pour une incidence φ_0 et une vibration rectiligne perpendiculaire (⊥) ou parallèle (||) au plan d'incidence, R , R' , T , $\epsilon_r = \delta_r + 2 Y_0 \eta$, $\epsilon_r' = \delta_r'$, $\epsilon_t = \delta_t + Y_0 \eta$, où $Y_0 = n_0 \cos \varphi_0$ et $\eta = (2 \pi d)/\lambda$.

(1) Rappelons que ces « coefficients » sont des rapports d'amplitudes (complexes) et contiennent donc aussi les déphasages.

1. Dans le cas d'un milieu stratifié symétrique absorbant, ces six quantités mesurables ne sont pas indépendantes. Il y a entre elles la relation suivante :

$$1 - R R' - T^2 - 2 \left[(1 - R) \sqrt{\frac{R'}{R_0}} \cos \epsilon_r' + T \sqrt{\frac{R}{R_0}} \cos (\epsilon_r - 2 \epsilon_t) \right] + 2 \sqrt{R R'} T \cos (\epsilon_r + \epsilon_r' - 2 \epsilon_t) = 0,$$

où R_0 représente, pour la même incidence φ_0 et la même polarisation, le facteur de réflexion lorsque les milieux n_0 et n_s sont au contact (c'est-à-dire lorsque $d = 0$, d'où l'indice 0).

La démonstration de cette relation sera donnée plus tard, dans un mémoire plus développé. Disons ici qu'il était à prévoir qu'il doit y avoir une relation entre les six quantités mesurables, car la matrice caractéristique du milieu stratifié symétrique ne contient que cinq paramètres indépendants.

2. Pour une incidence φ_0 donnée, les six quantités mesurables relatives à une vibration ⊥ ou || permettent de déterminer l'épaisseur du milieu stratifié symétrique, sans que les lois de variation de $\epsilon(z)$ et de $\mu(z)$ nous soient connues. Pour cela, il suffit de résoudre l'équation suivante :

$$a \sin 2 Y_0 \eta + b \cos 2 Y_0 \eta + c = 0$$

où

$$a = -\sqrt{RR'} \cos(\varepsilon_r + \varepsilon_{r'}) + \sqrt{\frac{R}{R_0}} \cos \varepsilon_r + T \cos 2\varepsilon_t$$

$$b = \sqrt{RR'} \sin(\varepsilon_r + \varepsilon_{r'}) - \sqrt{\frac{R}{R_0}} \sin \varepsilon_r - T \sin 2\varepsilon_t$$

$$c = \sqrt{\frac{R'}{R_0}} \sin \varepsilon_{r'}$$

Remarquons que nous avons posé

$$\sqrt{R_0} = (n_s - n_0)/(n_s + n_0)$$

dans le cas de l'incidence normale, les n_i étant remplacés, suivant le procédé habituel, soit par $Y_i = n_i \cos \varphi_i$ soit par $Z_i = n_i / \cos \varphi_i$, selon qu'il s'agit d'une vibration \perp ou \parallel respectivement ($n_s \sin \varphi_s = n_0 \sin \varphi_0$ détermine l'angle de réfraction dans le milieu n_s).

Nous laisserons de côté ici une discussion plus détaillée de cette relation.

3. Lorsque le milieu stratifié symétrique se réduit à une seule couche mince absorbante, il y a, de plus, entre les six quantités mesurables relatives à la vibration \perp et les mêmes quantités relatives à la vibration \parallel , l'angle d'incidence φ_0 étant le même dans les deux cas, la relation suivante :

$$\frac{T_{0\perp}}{R_{0\perp}} \times \frac{R'_{\perp} - R_{\perp}}{T_{\perp}} + \frac{T_{0\parallel}}{R_{0\parallel}} \times \frac{R'_{\parallel} - R_{\parallel}}{T_{\parallel}} =$$

$$= 4 \sqrt{\frac{T_{0\perp} T_{0\parallel}}{R_{0\perp} R_{0\parallel}}} \left[\sqrt{\frac{R'_{\perp} R'_{\parallel}}{R_{\perp} R_{\parallel}}} \cos(\varepsilon_{r'\perp} - \varepsilon_{t\perp} - \varepsilon_{r'\parallel} + \varepsilon_{t\parallel}) - \sqrt{\frac{R_{\perp} R_{\parallel}}{R'_{\perp} R'_{\parallel}}} \cos(\varepsilon_{r\perp} - \varepsilon_{t\perp} - \varepsilon_{r\parallel} + \varepsilon_{t\parallel}) \right] \frac{1}{\sqrt{T_{\perp} T_{\parallel}}}$$

où T_0 est l'analogue, pour l'onde transmise, de R_0

défini plus haut. La convention de signe relative à $\sqrt{R_0}$ est toujours celle qui a été faite plus haut.

4. Dans le cas d'un milieu stratifié symétrique non absorbant ($k=0$), il n'y a qu'un facteur de réflexion et un déphasage indépendants. Entre les six quantités $R, R', T, \delta_r, \delta_{r'}$, et δ_t il y a les quatre relations suivantes :

$$R = R' = 1 - T, \quad \delta_r + \delta_{r'} - 2\delta_t = \pi,$$

$$\cos \delta_t + \sqrt{\frac{R}{R_0}} \cos(\delta_t - \delta_r) = 0,$$

la dernière relation étant indiquée ici pour la première fois, vraisemblablement. Elle permet, connaissant, par exemple, R, ε_r et ε_t (quantités mesurables) de déterminer l'épaisseur du milieu stratifié symétrique non absorbant, sans connaître les lois de variation de $\varepsilon(z)$ et de $\mu(z)$, à partir de la relation

$$\operatorname{tg} Y_0 \eta = \frac{\cos \varepsilon_t + \sqrt{\frac{R}{R_0}} \cos(\varepsilon_t - \varepsilon_r)}{-\sin \varepsilon_t + \sqrt{\frac{R}{R_0}} \sin(\varepsilon_t - \varepsilon_r)}.$$

Ceci montre aussi que pour un angle d'incidence donné, la fraction qui se trouve à droite du signe égal, est la même pour une vibration \perp et pour une vibration \parallel au plan d'incidence.

Nous ne discuterons pas ici les applications pratiques de ces résultats. Remarquons simplement que les milieux stratifiés symétriques sont très souvent utilisés dans la pratique (par ex. les systèmes de lames minces alternées comportant un nombre impair de couches de haut et bas indice et les filtres interférentiels du type FABRY-PÉROT simples ou complexes).

Manuscrit reçu le 16 octobre 1956.

BIBLIOGRAPHIE

The interference systems of crossed diffraction gratings (Theory of Moiré fringes). J. GUILD. The Clarendon Press, Oxford, 1956, pp. 152 + viii. 25 s. net.

The moiré fringes resulting from crossed diffraction gratings, noted by RAYLEIGH in 1874, have recently been used by MERTON as a test for the ruling errors in his gratings. Arising from MERTON's elegant work, the National Physical Laboratory has for the past seven years undertaken a programme of development of grating production and testing, and an important sideline of this work has been the application of the moiré fringes themselves to automatic metrology. The fringes resulting from two replicas of the same grating placed almost in contact can be made to indicate relative motion between the replicas; and the

possibility of counting the fringes photoelectrically has opened up the prospect of automatic machine tool control, by replacing the normal machine scales by grating replicas.

Mr GUILD has been responsible for much of the work at the N. P. L. on the testing of gratings and it is therefore of considerable general value that he should have produced the present book, which describes his development of the theory of moiré fringes and illustrates the influence of grating defects. He has written "with the primary object of helping those engaged in harnessing moiré fringes in the service of technology and industry" and the book is concentrated on the fundamentals of the moiré patterns themselves. The effect of ruling errors on the shape of the fringes, and the influence of groove form on intensity distribution are the author's main concern in the present mono-

graph. He has reserved technical matters, such as the best ways of observing the fringes and of mounting the gratings, for a shorter paper which is in preparation.

This is not an easy book to review, in that one needs to acquire a working familiarity with the nomenclature which the author has had to develop for this new field, and the detail, although straightforward, is necessarily heavy. A superficial comment is that the reader would probably be grateful for more "signposts".

The author, for example, limits his treatment of the "crossing" of gratings for most of the book to instances where the grating surfaces are paralld, and the reader inexperienced in this field may ask himself

why this limitation is imposed, when in practice the surfaces of any two gratings are unlikely to be exactly paralld. The author adequately answers this question at the end of the book (and indeed the answers to many questions concerning fringes can be found in the book) but an anticipatory reference would have been helpful at the beginning of the analysis.

Although there are few diagrams in the text, there are some good photographs at the end of the book showing the characteristics of the principal kinds of fringe defect. Mr GUILD has given an impressive account of this aspect of the work behind the application of moiré fringes.

R. V. JONES.

INFORMATION

Colloque de spectroscopie interférentielle. — Un Colloque international, organisé par le *Centre National de la Recherche Scientifique* aura lieu aux Laboratoires de Bellevue, près de Paris, du 9 au 13 Septembre 1957 sur le sujet suivant : Progrès récents et méthodes nouvelles en spectroscopie interférentielle.

Suivant la formule adoptée par le C. N. R. S. pour les Colloques Internationaux, le sujet du colloque est nettement limité et la participation au colloque est réservée à ceux qui ont contribué au développement du sujet par leurs recherches personnelles ; cependant les physiciens qui sont spécifiquement intéressés par le sujet peuvent assister au colloque à titre d'auditeur.

Plusieurs physiciens d'Europe et d'Amérique ont déjà promis d'assister au colloque et d'y présenter des communications. Entre autres : P. FELLGETT, D. A. JACKSON, J. H. JAFFÉ, F. A. JENKINS, H. KUHN, J. E. MACK, K. W. MEISSNER, J. RAND MAC NALLY, A. STEUDEL, J. STRONG, J. TERRIEN.

Les communications prévues sont, provisoirement, groupées sous les rubriques suivantes :

I. Principes généraux des méthodes nouvelles de spectroscopie interférentielle (par exemple : FABRY-PEROT photoélectrique, méthodes par modulation et transformation de FOURIER, etc.).

II. Problèmes de principe spécifiques au FABRY-

PEROT (par exemple : extensions aux domaines spectraux étendus, aux problèmes astronomiques, FABRY-PEROT sphérique, etc.).

III. Procédés d'exploration des spectres avec le FABRY-PEROT (variations de pression, déplacements mécaniques, utilisation de la magnétostriction, etc.).

IV. Qualités des lames et couches réfléchissantes pour le FABRY-PEROT ; détails pratiques.

V. Descriptions et performances d'équipements FABRY-PEROT.

VI. Problèmes métrologiques.

VII. Mise en pratique des méthodes interférentielles autres que FABRY-PEROT. Instruments et résultats.

Cependant toute contribution qui n'entre pas dans les paragraphes précédents pourra être acceptée à condition qu'elle soit nouvelle et intéresse les méthodes de spectroscopie *interférentielle* (les propriétés et les modes classiques d'utilisation des réseaux sont exclus du champ du colloque).

Des renseignements complémentaires peuvent être obtenus en écrivant à l'adresse suivante : Professeur P. JACQUINOT (Colloque S. I.), Laboratoires du C. N. R. S., Bellevue (S.-et-O.).